

SÉRIE A, N° 964

N° D'ORDRE : 989

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
(MENTION SCIENCES)

PAR

CLAUDIU IONESCU-BUJOR

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE INTRINSÈQUE DES ÉCOULEMENTS
PERMANENTS ET ROTATIONNELS D'UN
FLUIDE PARFAIT

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 3 juin 1961 devant la Commission d'examen

MM. J. PÉRÈS

Président

P. GERMAIN

H. CABANNES

} *Examineurs*



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553817_0062

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
(MENTION SCIENCES)

PAR

CLAUDIU IONESCU-BUJOR

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE INTRINSÈQUE DES ÉCOULEMENTS
PERMANENTS ET ROTATIONNELS D'UN
FLUIDE PARFAIT

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 3 juin 1961 devant la Commission d'examen

MM. J. PÉRÈS

Président

P. GERMAIN

H. CABANNES

Examineurs



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen M. ZAMANSKY

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
De BROGLIE	T	Théories Physiques	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées	CUVILLIER	T	Micropaléontologie
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés	JUNG	T	Pétrographie
PREVOST	T	Chimie organique	TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique
CHAUDRON	T	Chimie appliquée	WIEMANN	T	Chimie organique et struc.
WYART	T	Minéralogie et Cristal.	JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay)
TEISSIER	T	Zoologie	VASSY	T	Physique de l'atmosphère
MANGENOT	T	Biologie vég. (Orsay)	DESTOUCHES	T	Théories Physiques
AUGER	T	Physique quantique et Relativité	AMIEL	T	Chimie générale
MONNIER	T	Physiologie Générale	HOCART	T	Minéralogie et Cristallog.
PIVETEAU	T	Paléontologie	J. P. MATHIEU	T	Physique (Optique)
ROCARD	T	Physique (E.N.S.)	COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.)
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.)	MAY	T	Zoologie (Orsay)
LAFFITTE	T	Chimie générale	CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie
FAVARD	T	Géométrie supérieure	FELDMANN	T	Biologie végétale marine
COULOMB	T	Physique du Globe	GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay)
M ^{le} COUSIN	T	Biologie animale (S.P.C.N.)	JOST	T	Physiologie comparée
CHRETIEN	T	Chimie minérale	FORTET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique
DRACH	T	Zoologie	SCHWARTZ	T	Calcul diff. et intégral
KASTLER	T	Physique (E.N.S.)	CHOUARD	T	Physiologie végétale
EPHROSSI	T	Génétique	MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.)
RIVIERE	T	Géologie S.P.C.N. et sédim.	BRELOT	T	Calcul diff. et intégral
GAUTHERET	T	Biologie vég. (P.C.B.)	NORMANT	T	Synthèse organique générale
LUCAS R.	T	Recherches Physiques	BENARD	T	Chimie minérale
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire	BUVAT	T	Botanique (E.N.S.)
ARNULF	T	Optique appliquée	DUGUE	T	Statistiques Mathématiques
MORAND	T	Physique Enseignement	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.)	ULRICH	T	Physiologie végétale
FORTIER	T	Mécanique exp. des fluides	MARECHAL	T	Optique théorique et appliquée
DANJON	T	Astronomie	KIRRMANN	T	Théories Chimiques
PETIT	T	Biologie maritime	CHADEFAUD	T	Botanique
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique	M ^{le} LE BRETON	T	Physiologie de la nutri.
GALLIEN	T	Embryologie	SALEM	T	Mathématiques générales
EICHHORN	T	Botanique	LELONG	T	Applic. de l'analyse à la géométrie
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.)	DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparées
M ^{le} CAUCHOIS	T	Chimie Physique	EHRESMANN	T	Topologie Algébrique
THELLIER	T	Physique du Globe	FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.)
L'HERITIER	T	Biologie Générale (Orsay)			
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay)			
PONCIN	T	Mécanique Générale			
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des Nombres			
QUELET	T	Chimie organique			

GLANGEAUD T Géographie phys. et
 Géologie dynamique
 GODEMENT T Mathématiques (M.P.C.)
 PISOT T Techn. Mathém. de la
 Physique
 ROCH T Géologie
 SCHATZMAN T Astrophysique
 TERMIER T Paléontologie stratig.
 ZAMANSKY T Mathématiques générale
 les
 LENNUIER T Physique (M.G.P.)
 RIZET T Génétique (Orsay)
 ROUTHIER T Géologie appliquée
 Mme TONNELAT . . T Physique Théorique
 DIXMIER T Mathématiques (M.P.C.)
 SOUCHAY T Chimie générale
 AIGRAIN T Electrotechnique géné-
 rale
 BRUSSET T Chimie systématique
 M. LEVY T Physique théorique des
 hautes énergies (Orsay)
 Mme CHAIX T Chimie biologique
 Mme HUREL-PY . . T Biologie végétale (PCB)
 PIAUX T Chimie (M.P.C.)
 BRUN T Mécan. théorique des
 fluides
 LEDERER T Chimie biologique
 Mme DUBREIL . . . T Mathém. (Agrégation)
 Mme LELONG T Mathématiques (E.N.S.)
 BELLAIR T Géologie (S.P.C.N.)
 COTTE T Physique, électricité
 DUBOIS J. E. . . . T Chimie organique
 LAMOTTE T Zoologie (E.N.S.)
 MICHEL A. T Chimie minérale (Orsay)
 OLMER T Energétique générale
 ROUAULT T Electricité (Orsay)
 GAUTHIER T Mécanique appliquée
 BARCHWITZ T Chimie Physique
 BROSEL T Physique atomique
 BUSER T Physiologie comparée
 CAMUS T Physiologie vég. B.M.P.V.
 CASTAING T Physique (Orsay)
 CURIEN T Minéralog. et Cristallog.
 MOYSE T Physiologie vég.
 (Orsay)
 NOIROT T Evolution des êtres
 organisés
 PANNETIER T Chimie générale (Orsay)
 POSSOMPES T Zoologie
 PULLMANN T Chimie théorique
 TEILLAC T Physique nucl. et Ra-
 dioactivité
 TONNELAT T Biologie Physico-chim.
 VILLE T Econométrie
 WILLEMART T Chimie (P.C.B.)
 DODE T Chimie (Orsay)
 FREYMAN T Recherches Physiques
 GUINOCHET T Biol. vég. S.P.C.N.
 (Orsay)
 ROLLET T Chimie (P.C.B.)
 Mlle JOSIEN T Chimie (S.P.C.N.)
 CHEVALLEY T Géométrie algébrique et
 théorie des groupes

ARNOULT T Electronique (Orsay)
 CHAPELLE T Physique (Orsay)
 DELANGE T Mathématiques (Orsay)
 DENY T Mathématiques Géné.
 (Orsay)
 GERMAIN T Mécan. théor. des flui-
 des
 LUCAS G. T Géologie
 ALLARD T Chimie Physique
 BERTHELOT T Phys. fondamentale des
 hautes énergies (Orsay)
 BRICART T Météorologie et Phys. de
 l'atmosphère
 Mme ALBE-
 FESSARD T Psychophysologie
 FRIEDEL T Physique des Solides-
 (Orsay)
 M. JULIA Etudes des Moléculaires
 naturelles complexes
 LENDER T Biol. animale S.P.C.N.
 (Orsay)
 MAGAT Physico-chimie des ra-
 dio-éléments
 Mlle QUINTIN . . . T Electrochimie
 MONOD T Chimie du métabolisme
 BENOIT T Physiol. anim. (Orsay)
 DE POSSEL T Analyse numérique
 CHARLOT T Chimie analytique
 HAISSINSKY T Radiochimie
 LEMEE T Physiol. vég. B.M.P.V.
 (Orsay)
 GUERIN T Chimie M.P.C. (Orsay)
 CHATELET M. . . . T Chimie (P.C.B.)
 JEAN T Physique nucléaire
 (Orsay)
 MATTLER T Physique (S.P.C.N.)
 MICHEL L. Phys. théor. des htes
 énergies (Orsay)
 BERGERARD T Zoologie (Orsay)
 BERTEIN T Electronique (Orsay)
 BOUSSIÈRES Chimie des Radioélé-
 ments (Orsay)
 Mme COUTURE . . . T Thermodynamique et
 Méc. physique
 ELLENBERGER . . . T Géologie appl. s/le terr.
 FRANC Biol. animale (P.C.B.)
 SCHNELL Botanique tropicale
 (Orsay)
 STOLKOWSKI Physiologie générale
 ACHER Chimie Biol. (Orsay)
 BAUDOIN Biologie animale (P.C.B.)
 BEAUMONT Biologie animale
 (S.P.C.N.)
 BLAMONT T Géophysique Iono-
 sphère
 BOURREAU Botanique
 CURIE D. Physique (M.G.P.)
 DURAND-DELGA . . . Géologie
 FREON T Chimie organique
 (Orsay)
 HELLER T Physiologie végétale
 TORTREAT T Calcul des Probabilités
 CAILLEUX Géologie (S.P.C.N.)

MAGNAN T Physique (S.P.C.N.)
 DAUDEL T Mécanique ondulatoire
 appl. à la Chim. théor.
 et à la Phys. nucléaire
 Biol. végétale (S.P.C.N.)
 Mlle FOURCROY
 Mme CHOQUET-
 BRUHAT T Méc. analytique et Méc.
 céleste
 Physiologie Générale
 Mlle VEIL
 LWOFF T Microbiologie
 SIESTRUNCK T Mécan. phys. et expé-
 rimentale
 LACOMBE T Métallurg. des métaux
 nucléaires
 BROCHARD T Physique P.C.B.
 (Orsay)
 CABANNES T Mécanique générale
 LESIEUR T Mathématiques M.P.C.
 (Orsay)

MAZET T Mécanique générale
 (Orsay)
 CAIRE Géographie phys. et
 Géol. dynamique
 COMOLET T Mécanique des fluides
 CORABOEUF Physiologie animale
 DELLOUE Physique de l'exosphère
 GORENFLOT Botanique II (Orsay)
 HOUILLOIN Biologie animale (P.C.B.)
 JULLIEN J. Chimie (P.C.B.)
 MALGRANGE T Tech. Math. de la Phys.
 OLIVIER Antropologie
 NOZERAN T Botanique II (Orsay)
 BLANC-LAPIERRE . . . Physique E.N.S. (Orsay)
 CHEVAUGEON T Botanique (Orsay)
 KAHANE T Mathématiques (Orsay)
 SAMUEL T Mathématiques E.N.S.
 féminines
 KOURGANOFF T Astronomie (Orsay)
 THIRY T Mécanique céleste

Secrétaire général R. POULLAIN

ÉTUDE INTRINSÈQUE DES ÉCOULEMENTS PERMANENTS ET ROTATIONNELS D'UN FLUIDE PARFAIT

AVANT-PROPOS

La classe des écoulements permanents d'un fluide parfait, compressible ou incompressible, occupe une place particulière dans les études théoriques de mécanique des fluides, parce qu'elle constitue la direction de recherche, où les méthodes mathématiques exactes ont pu être poussées le plus loin. C'est surtout le cas des écoulements irrotationnels et plans (ou à symétrie axiale) de cette classe, qui a été favorisé par les nombreuses connaissances acquises dans les domaines des mathématiques touchés par lui (en particulier, les équations aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables, et les fonctions analytiques d'une variable complexe). Les développements de ces chapitres importants des mathématiques ont donné non seulement la possibilité d'entreprendre des études qualitatives précieuses sur la structure de ces écoulements, mais ils ont offert également une technique de calcul, qui permet souvent de trouver des solutions explicites et des valeurs numériques dans le cas d'un problème concret.

L'efficacité de ces méthodes mathématiques exactes est réduite par le fait que, dans la plupart des cas, le schéma défini par ces hypothèses est trop éloigné de l'écoulement réel. Il convient donc d'éliminer au moins une partie de ces hypothèses et, en même temps, d'étendre les principales méthodes mathématiques, qui ont été employées avec succès dans ces cas particuliers.

Dans ce travail, nous ne garderons constamment que l'hypothèse « de l'écoulement permanent » et celle « du fluide parfait ». L'idée, qui nous a conduit à ce travail, a été la recherche d'une voie mathématique générale et unitaire, permettant de déduire les principaux cas particuliers connus en partant du cas général précisé précédemment. Nous avons essayé d'établir, pour chaque cas envisagé, une correspondance biunivoque entre les propriétés physiques caractéristiques, d'une part, et le type du problème mathématique, d'autre part ; une telle correspondance a des conséquences importantes.

Elle permet d'abord de préciser tous les écoulements caractérisés par le même type de problème mathématique et de déduire ainsi le nombre minimum de conditions physiques nécessaires pour pouvoir employer une certaine méthode de calcul. D'autre part, elle donne la possibilité de construire, de manière assez simple et naturelle, des classes d'écoulements intermédiaires entre le cas le plus général et le cas le plus particulier.

Pour envisager la corrélation qui existe entre les éléments dynamiques et thermodynamiques de ces écoulements et leur « configuration géométrique », nous avons introduit de nouvelles fonctions inconnues ; une étude intrinsèque de ce genre se réduit finalement à un système de « conditions nécessaires », caractérisant la classe d'écoulements envisagée et concernant les paramètres qui déterminent la famille de lignes de courant et celle de lignes de tourbillon.

Nous avons essayé de donner, dans ce travail, une image générale de la méthode employée, de ses avantages et de ses limites ; nous espérons que nous avons réussi à atteindre ce but, du moins partiellement.

A cette occasion, nous tenons beaucoup à exprimer nos vifs et sincères remerciements à M. le Professeur P. GERMAIN pour les conseils précieux qu'il nous a offerts au cours de nos études à Paris et pendant la rédaction de ce travail.

Nous remercions également M. le Doyen J. PÉRÈS et M. le Professeur H. CABANNES d'avoir bien voulu accepter de faire partie du Jury.

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE I^{er}

Considérations générales

A — INTRODUCTION

§ 1. Nous nous proposons de développer dans ce travail une nouvelle méthode d'étude du « problème fondamental » ¹⁾ de la mécanique des fluides ; cette méthode va nous permettre d'obtenir des généralisations naturelles et simples de certains résultats connus, de développer quelques considérations qualitatives sur « la géométrie » des écoulements envisagés, de trouver la signification mathématique de quelques hypothèses simplificatrices — utilisées dans l'étude de certaines classes d'écoulements — et même de formuler quelques résultats nouveaux.

¹⁾ Le sens précis, dans lequel nous utilisons ce terme, sera expliqué dans ce paragraphe et le suivant.

Dans toutes les questions traitées dans ce travail, nous allons supposer que les hypothèses suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ \text{ le fluide est parfait,} \\ 2^\circ \text{ l'écoulement est permanent,} \\ 3^\circ \text{ la force de masse } \vec{F} \text{ dérive d'un potentiel } Q, \end{array} \right\} \quad (C_0)$$

sont toujours satisfaites, et ces hypothèses seront parfois sous-entendues, en l'absence d'autres précisions.

Afin de définir plus clairement le cadre et le caractère de nos développements, nous pensons qu'il est nécessaire de formuler d'abord quelques observations générales.

Pour l'étude mathématique d'une classe quelconque d'écoulements, il est bien connu que l'on utilise les lois générales de la mécanique des fluides — lesquelles expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale — et, aussi, les lois de la thermodynamique.

Ces lois générales, valables pour tous les fluides et pour tous les écoulements possibles, nous conduisent, dans le cas des hypothèses (C_0) , au système d'équations suivant :

$$\left. \begin{array}{l} (a) \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0, \\ (b) \vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{v} = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} \frac{V^2}{2} + \operatorname{grad} Q, \\ (c) \vec{v} \cdot \operatorname{grad} S = 0, \\ (d) T \operatorname{grad} S = \operatorname{grad} h - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \end{array} \right\} \quad (I_0)$$

pour lequel nous avons utilisé les notations habituelles.

On sait que, dans le cas considéré, la conservation de l'énergie totale est une conséquence de l'équation $(I_0.b)$ — qui exprime la conservation de la quantité de mouvement — et de l'équation $(I_0.c)$ — qui exprime la conservation de l'entropie S — ; nous rappellerons aussi que l'équation vectorielle $(I_0.d)$ s'obtient par élimination de l'énergie interne entre les relations qui expriment les deux principes de la thermodynamique, d'une part, et la relation de la définition de l'enthalpie h , d'autre part.

Donc, le système (I_0) donne huit équations scalaires, indépendantes entre elles, pour les huit fonctions inconnues introduites : les trois composantes de la vitesse $\vec{v}$, la pression p , la masse spécifique ρ , l'entropie S , l'enthalpie h et la température absolue T ²⁾.

²⁾ Pour toutes les grandeurs physiques considérées nous prenons leurs valeurs « spécifiques ».

On peut considérer que les lois de la mécanique des fluides et de la thermodynamique jouent un rôle égal pour nous et, dans ce cas, il faut prendre ensemble les équations qui les expriment. Mais, pour déterminer un certain écoulement permanent d'un fluide parfait connu, dans un domaine tridimensionnel $(\mathfrak{D})$ donné³⁾, il faut ajouter au système d'équations (I_0) d'autres conditions. On peut dire que notre « problème fondamental » est de trouver « des classes de solutions » du système d'équations (I_0) en tenant compte de ces conditions supplémentaires.

Au point de vue mathématique, si nous voulons trouver une solution bien déterminée du système d'équations (I_0) , il faut d'abord savoir si ce système est complet ou non, c'est-à-dire si les lois physiques utilisées donnent un nombre suffisant d'équations, indépendantes entre elles, permettant de formuler correctement un problème aux limites donné — en tenant compte, bien entendu, des données mathématiques traduisant les « conditions physiques » particulières au problème étudié —.

En général, à l'aide de ces « conditions physiques » supplémentaires, on doit pouvoir connaître, pour chacune de ces huit fonctions inconnues (et, aussi, pour leurs dérivées partielles du premier ordre), les valeurs sur la frontière du domaine considéré $(\mathfrak{D})$, les valeurs « initiales » (au moment $t = 0$ ou sur une certaine surface), ainsi que leur comportement à l'infini, et savoir si elles sont continues partout dans $(\mathfrak{D})$ ou discontinues sur certaines courbes ou surfaces, etc. . .

Si, dans ces conditions, on trouve une solution du système d'équations (I_0) , alors on connaît non seulement la distribution des vitesses et des pressions dans le domaine considéré, mais encore la distribution de l'entropie S , de l'enthalpie h , de la masse spécifique ρ et de la température absolue T .

Donc, ces grandeurs thermodynamiques déterminent aussi le fluide qui réalise cette distribution de vitesses et de pressions, dans les conditions considérées.

Mais, en général, par leur caractère spécifique, les problèmes de la mécanique des fluides (tels qu'ils sont formulés à présent) ne permettent pas d'aborder de cette façon l'étude mathématique du système d'équations (I_0) , une partie des conditions supplémentaires précisées précédemment n'étant pas connues a priori.

Par exemple, si l'on considère le problème de CAUCHY pour le système d'équations (I_0) , on peut, en principe, déterminer la région du domaine $(\mathfrak{D})$ où ce système est du type hyperbolique, celle où il est du type elliptique, etc. (par rapport à la solution choisie)⁴⁾.

Dans la région où le système d'équations (I_0) est du type hyperbolique, il faut connaître les valeurs des fonctions inconnues et de leurs dérivées partielles du premier ordre sur une surface non caractéristique, pour pouvoir appliquer la méthode de CAUCHY. Supposons que l'on connaisse,

³⁾ C'est-à-dire que le fluide, le domaine et le type d'écoulement sont précisés dans ce cas.

⁴⁾ Dans certains problèmes, le système d'équations (I_0) peut être, dans tout le domaine considéré, soit du type hyperbolique, soit du type elliptique, etc.

par des mesures expérimentales, les valeurs, sur cette surface non caractéristique, de certaines fonctions (composantes de la vitesse, pression, température absolue); les valeurs des autres fonctions inconnues (entropie, enthalpie) ne peuvent cependant être déterminées sur cette surface ni par des mesures, ni par le calcul, à moins de préciser le fluide considéré.

Dans la région où ce système d'équations est du type elliptique, les valeurs des fonctions inconnues sur la frontière de cette région jouent un rôle important; en général, on peut considérer que cette frontière contient entièrement la surface (ou la courbe) qui limite un certain obstacle placé au sein du fluide, ou seulement une partie de cette surface (ou de courbe). Or, dans la plupart des problèmes de mécanique des fluides, seule la condition de glissement nous donne quelques indications sur les valeurs des composantes de la vitesse sur la frontière de l'obstacle. En général, nous ne savons rien des autres fonctions inconnues sur la frontière du domaine. De plus, le but principal et l'intérêt pratique du problème sont souvent la détermination de la distribution des pressions, ou des températures, sur l'obstacle (ou sur la frontière du domaine d'ellipticité).

Pour ces raisons, un tel point de vue ne saurait présenter qu'un intérêt théorique général; il n'est pas directement rattaché aux problèmes spécifiques de la mécanique des fluides.

Nous allons donc considérer le système d'équations (I_0) comme un système de « conditions nécessaires » et, pour le moment, nous n'envisagerons pas notre problème au point de vue exposé précédemment.

§ 2. Si l'on considère un fluide quelconque, mais « donné » (défini par ses propriétés thermodynamiques), on peut étudier les différents écoulements possibles de ce fluide; on dit que le fluide est « donné », si l'on connaît son équation d'état sous la forme canonique :

$$h = h(p, S), \quad (1.1)$$

c'est-à-dire si l'on connaît l'enthalpie h comme fonction de la pression et de l'entropie ⁵⁾. Dans ce cas, l'équation ($I_0.d$) donne les deux autres grandeurs thermodynamiques :

$$T = \left(\frac{\partial h}{\partial S} \right)_{p=\text{const.}}, \quad \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{S=\text{const.}}, \quad (1.2)$$

comme fonctions de p et de S . Si l'on connaît donc la pression p et l'entropie S comme fonctions des variables d'espace, les relations (1.1) et (1.2) déterminent les grandeurs h , T et ρ comme fonctions de ces variables.

Nous voudrions préciser ici que la forme habituelle de la loi d'état :

$$p = p(\rho, S) \quad (1.3)$$

n'est pas équivalente, dans le cas général, à la forme canonique (1.1), car elle ne détermine pas entièrement les autres grandeurs thermodynamiques.

⁵⁾ Il y a toujours une relation du type (1.1) qui relie l'enthalpie h , l'entropie S et la pression p , car l'existence d'une telle relation est une conséquence directe de l'équation vectorielle ($I_0.d$); mais le fluide est « donné » lorsqu'on connaît l'expression analytique de cette relation.

ques. En effet, si l'on n'ajoute pas d'autres hypothèses, l'équation (I₀.d) donne :

$$\frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial h}{\partial S} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S} + T$$

et, en éliminant la fonction h des deux relations, on remarque que la fonction $T(\rho, S)$ n'est pas entièrement déterminée en S ; on a :

$$T = \int \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial S} d\rho + T_1(S),$$

avec $T_1(S)$ arbitraire. Donc, la fonction $h(p, S)$ n'est pas non plus entièrement déterminée en S .

L'explication est très simple, car l'équation (1.3) est équivalente à la deuxième relation de (1.2); donc, si l'on ajoute seulement l'équation (1.3) à l'équation (I₀.d), on ne peut pas retrouver l'équation (1.1) (il faut tenir également compte de l'autre relation de (1.2), qui donne T). Par conséquent, dans le cas général, on doit prendre la loi d'état sous la forme canonique (1.1).

Pour étudier les différents écoulements d'un fluide « donné », on voit qu'on peut remplacer l'équation vectorielle (I₀.d) par les trois relations scalaires (1.1) et (1.2); autrement dit, le choix du fluide (donc le choix de la forme analytique de la loi d'état) est équivalent au choix d'une « solution » du système de trois équations scalaires aux dérivées partielles, onné par (I₀.d), h , T et ρ étant considérées comme des fonctions inconnues, p et S comme paramètres.

Nous remplacerons l'équation vectorielle (I₀.b) par l'équation obtenue en ajoutant membre à membre les équations (I₀.b) et (I₀.d); groupant les termes de cette nouvelle équation de façon convenable, nous pourrions l'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v} = -T \text{ grad } S + \text{grad } H, \quad (1.4)$$

en notant par :

$$H = h + \frac{1}{2} V^2 + Q \quad (1.5)$$

l'énergie totale de l'écoulement considéré.

Les équations (I₀.c) et (1.4) donnent :

$$\vec{v} \cdot \text{grad } H = 0. \quad (1.6)$$

Donc — résultat bien connu —, dans le cadre des hypothèses (C₀), l'énergie totale H est constante le long d'une ligne de courant et ne dépend que des deux paramètres indépendants qui définissent chaque ligne de courant.

En conclusion, tout écoulement permanent d'un fluide parfait et « donné » est régi par le système d'équations suivant :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \operatorname{div} (\rho \vec{v}) &= 0, \\ (b) \quad \vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{v} &= -T \operatorname{grad} S + \operatorname{grad} H, \\ (c) \quad \vec{v} \cdot \operatorname{grad} S &= 0, \\ (d) \quad h &= h(p, S), \\ (e) \quad H &= h + \frac{1}{2} V^2 + Q, \\ (f) \quad \frac{1}{\rho} &= \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{S=\text{const.}}, \\ (g) \quad T &= \left(\frac{\partial h}{\partial S} \right)_{p=\text{const.}}, \end{aligned} \right\} \quad (I_1)$$

donc, par un système de neuf équations scalaires, indépendantes, pour neuf fonctions inconnues.

Par rapport au système d'équations (I_0) , le nouveau système d'équations (I_1) est plus simple, car les quatre dernières équations ne contiennent plus les dérivées partielles des fonctions inconnues H , T et ρ par rapport aux variables d'espace.

Si l'on remplace, dans les cinq premières équations scalaires du système (I_1) , les grandeurs H , h , ρ et T par leurs expressions en fonction de p et S (données par les quatre dernières équations du même système), on obtient un système quasi-linéaire de cinq équations aux dérivées partielles pour les cinq fonctions inconnues : les trois composantes de la vitesse $\vec{v}$, la pression p et l'entropie S ; on notera ce système quasi-linéaire par (I'_1) .

L'étude mathématique du système d'équations aux dérivées partielles (I'_1) présente les mêmes difficultés que celles rencontrées dans l'étude du système d'équations (I_0) ; nous n'insisterons plus sur ces questions car, pour notre méthode, le système d'équations (I_1) — ou (I'_1) — constitue seulement un point de départ.

Nous préciserons maintenant les trois principales classes d'écoulements permanents d'un fluide parfait et « donné », qui seront envisagées dans ce travail.

a) Classe des écoulements isentropiques (C_s)

Dans un grand nombre de problèmes, on peut considérer que les variations de l'entropie S sont très petites et, en réalité, négligeables par rapport aux variations des autres grandeurs du problème. Ces conditions physiques permettent de supposer dans ce cas que l'entropie S est

constante dans tout le domaine de l'écoulement. Cette hypothèse entraîne des simplifications importantes du système d'équations (I₁); l'équation d'état canonique (I₁.d) prend la forme :

$$h = h(p)$$

et elle est maintenant équivalente à la forme habituelle :

$$p = p(\rho),$$

qui se déduit de (1.3). Par exemple, on sait très bien que, dans le cas d'un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes, la loi d'état prend la forme adiabatique :

$$p = k\rho^\gamma \left(k = \frac{p_0^{(6)}}{\rho^\gamma}, \gamma = \frac{C_p}{C_v} \right)$$

et l'équation (I₁.f) donne, dans ce cas, l'expression suivante :

$$h = k \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} + C = \frac{1}{\gamma - 1} a^2 + C,$$

où la célérité du son a et la constante d'intégration C ont les valeurs suivantes :

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = k\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho},$$

$$C = h_0 - \frac{1}{\gamma - 1} a_0^2.$$

Dans ce cas, la température absolue T est définie directement par la relation :

$$T = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa k \rho^{\gamma-1},$$

κ étant une constante qui dépend seulement de l'état thermodynamique du gaz.

Par conséquent, si aux trois hypothèses (C₀) on ajoute l'hypothèse :

4° l'écoulement est isentropique,

on définit une classe d'écoulements régie par le système :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \operatorname{div} (\rho \vec{v}) &= 0, \\ (b) \quad \vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{v} &= \operatorname{grad} H, \\ (c) \quad p &= p(\rho), \\ (d) \quad H &= \int \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} d\rho + \frac{1}{2} V^2 + Q. \end{aligned} \right\} \quad (I_s)$$

⁶⁾ L'indice zéro signifie ici la valeur de la fonction prise en un certain point ou à un certain moment t_0 .

Ce système comprend six équations scalaires pour six fonctions inconnues⁷⁾ : les trois composantes de la vitesse $\vec{v}$, la masse spécifique ρ , la pression p et l'énergie totale H ; seules les quatre premières équations scalaires contiennent les dérivées partielles des fonctions inconnues par rapport aux variables indépendantes (x_i).

Dans ce cas, le problème de CAUCHY peut être formulé de façon correcte ; on peut donc considérer, à ce point de vue, le système d'équations (I_s) comme complet. Pour simplifier notre rédaction, dans ce travail nous désignerons par (C_s) les quatre hypothèses obtenues en ajoutant l'hypothèse 4° aux conditions (C_0) ; la classe d'écoulements ainsi définie sera aussi désignée par (C_s).

b) Classe des écoulements isoénergétiques (C_R)

Dans d'autres problèmes, les conditions physiques permettent de considérer l'énergie totale H comme constante dans tout le domaine de l'écoulement. Dans ce cas, l'équation ($I_1.b$) devient l'équation de CROCCO et l'équation ($I_1.c$) n'est plus qu'une conséquence de cette dernière équation. Par suite, le système d'équations qui régit cette classe d'écoulements est le suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0, \\ \text{(b) } \vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{v} = -T \operatorname{grad} S, \\ \text{(c) } h = h(p, S), \\ \text{(d) } h + \frac{1}{2} V^2 + Q = \text{const.}, \\ \text{(e) } \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{S=\text{const.}}, \\ \text{(f) } T = \left(\frac{\partial h}{\partial S} \right)_{p=\text{const.}}, \end{array} \right\} \quad (I_H)$$

donc, un système de huit équations scalaires pour huit fonctions inconnues ; mais seules les quatre premières équations scalaires de ce système contiennent les dérivées partielles des fonctions inconnues par rapport aux variables indépendantes (x_i).

On sait aussi que le problème de CAUCHY est bien posé dans ce cas ; le système d'équations (I_H) est donc complet à ce point de vue.

⁷⁾ On n'ajoute pas à ce système la relation qui définit la température absolue T (lorsqu'elle n'est pas constante) ; comme dans l'exemple donné ici, cette relation peut être considérée séparément.

Nous désignerons par (C_H) les quatre hypothèses, obtenues en ajoutant aux trois hypothèses (C_0) la suivante :

4° l'écoulement est isoénergétique,
et, aussi par (C_H) , la classe d'écoulements définie par ces quatre hypothèses.

c) Classe des écoulements « incompressibles » (C_i)

Enfin, dans d'autres problèmes (problèmes d'hydrodynamique et certains problèmes d'aérodynamique), les conditions physiques permettent de supposer le fluide incompressible ; on néglige, dans ce cas, les variations de la masse spécifique ρ par rapport aux variations des autres grandeurs du problème. On peut alors prendre :

$$\rho \equiv \rho_0 = \text{const.}$$

partout dans le domaine de l'écoulement ; la valeur de la constante ρ_0 peut être prise égale à l'unité en faisant un choix convenable des unités physiques utilisées.

Il n'est pas nécessaire de supposer que l'entropie S et la température absolue T sont également constantes et il y a des exemples expérimentaux qui prouvent que l'entropie S et la température absolue T peuvent varier même dans un fluide « incompressible ».

Les équations $(I_1.d)$, $(I_1.f)$ et $(I_1.g)$ donnent :

$$h = p + h_1(S) \quad (1.7)$$

et

$$T = \frac{dh_1}{dS}, \quad (1.8)$$

l'expression analytique de la fonction $h_1(S)$ étant supposée connue ; il en résulte pour l'équation $(I_1.e)$ la forme :

$$H = H' + h_1(S), \quad (1.9)$$

en désignant par H' la fonction suivante :

$$H' = p + \frac{1}{2} V^2 + Q. \quad (1.10)$$

On remarque aussi que le second membre de l'équation $(I_1.b)$ devient :

$$- T \text{ grad } S + \text{grad } H = \text{grad } H'.$$

Par conséquent, en ajoutant aux hypothèses (C_0) l'hypothèse 4° le fluide est incompressible, on obtient une classe d'écoulements qui peut être caractérisée par le système d'équations suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } \text{div } \vec{v} = 0, \\ \text{(b) } \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v} = \text{grad } H', \\ \text{(c) } p + \frac{1}{2} V^2 + Q = H', \end{array} \right\} \quad (I_i)$$

donc par un système de cinq équations scalaires pour cinq fonctions inconnues. Lorsque l'entropie S et la température absolue T ne sont pas constantes, il faut ajouter d'autres équations au système (I_i) ; d'abord, il faut ajouter l'équation (I_{1c}) , qui permet de déterminer l'entropie S dès qu'une « solution » du système (I_i) a été trouvée. Les équations (1.7), (1.8) et (1.9) fourniront ensuite les expressions de l'enthalpie h , de la température absolue T et respectivement de l'énergie totale H . Lorsque l'entropie S et la température absolue T sont constantes partout dans le domaine de l'écoulement, le système (I_i) contient toutes les équations du problème, la fonction H' étant égale dans ce cas à l'énergie totale H .

En tenant compte de toutes ces remarques, on peut toujours se limiter à l'étude du système d'équations (I_i) ; lorsque l'hypothèse 4° n'est pas remplie, cette étude doit être complétée de la manière indiquée précédemment.

On désignera par (C_i^1) le groupe d'hypothèses obtenu en ajoutant 4''° aux trois conditions (C_0) , et par (C_i) le groupe d'hypothèses obtenu en ajoutant 4° et 4''° aux trois conditions (C_0) ; les classes d'écoulements ainsi définies seront aussi désignées par (C_i^1) et respectivement par (C_i) . En caractérisant les deux classes d'écoulements par le même type de système d'équations, il n'est plus nécessaire de les étudier séparément.

Les trois principales classes d'écoulements, indiquées dans ce paragraphe, sont le plus fréquemment envisagées dans les problèmes concernant les écoulements permanents d'un fluide parfait et « donné ». Comme on le verra d'une façon plus précise dans les paragraphes suivants, les limitations adoptées nous ont été imposées par le caractère de notre méthode; elles ne restreignent pas beaucoup la généralité de nos considérations.

On constate que, dans les trois systèmes d'équations considérés dans ce paragraphe: (I_S) , (I_H) et (I_i) , seules les deux premières équations vectorielles (a) et (b) de chacun des systèmes contiennent les dérivées partielles des fonctions inconnues par rapport aux variables indépendantes x_1, x_2, x_3 . On voit en outre que ces équations vectorielles ont à peu près la même forme dans les trois cas. Ce fait nous permet de faire, dans ce travail, l'étude parallèle des trois classes d'écoulements, en utilisant la même méthode mathématique pour les trois systèmes d'équations envisagés.

Les développements, que contiennent les deux paragraphes, sont évidemment connus; toutefois, nous avons pensé qu'il était nécessaire d'y revenir et de les formuler sous la présentation précédente, afin de préciser le cadre et le caractère des développements qui vont suivre.

§ 3. Récemment, VICTOR VALCOVICI [41]—[43] a étudié le cas des écoulements permanents et isentropiques d'un fluide parfait, donné, — cas désigné précédemment par (C_S) — et il a établi quelques résultats remarquables, qui présentent une certaine analogie avec les résultats classiques de la théorie des écoulements plans et irrotationnels d'un fluide parfait, « donné ».

Ces résultats, constituant un point de départ pour nos recherches figurent dans ce paragraphe sous une forme résumée.

Si l'on considère la famille de surfaces :

$$H(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}, \quad (1.11)$$

l'équation vectorielle (I_s.b) montre que, en chaque point M du domaine considéré ($\mathfrak{D}$), la surface $H(x_1, x_2, x_3)$ passant par ce point contient la ligne de courant et la ligne de tourbillon qui passent aussi par M ; les surfaces (1.11) peuvent donc être considérées comme des surfaces rigides le long desquelles a lieu l'écoulement étudié. Les surfaces de la famille (1.11) — qui sont dénommées dans la littérature « surfaces de BERNOULLI » ou « surfaces d'énergie totale » — ont été mises en évidence depuis longtemps et elles ont fait l'objet de nombreux travaux, dont nous citerons ceux de : H. POINCARÉ [34], A. VITERBI [45], B. SEGRE [36], U. CISOTTI [13], [14], B. CALDONAZZO [9], [10], [11], B. FINZI [16], [17], A. MASOTTI [28], S. S. BIOUSGHENS [7], [8], V. VALCOVICI [41], [42], [43], G. GHEORGHIEV [21], [22], L. DRAGOŞ [15].

Dans [43], VICTOR VALCOVICI rapporte l'écoulement envisagé — dans le cadre des hypothèses (C_s) — à un système de coordonnées curvilignes q_i ($i = 1, 2, 3$), en choisissant, comme lignes $q_3 = \text{variable}$, la famille de courbes orthogonales à la famille de surfaces (1.11); les coordonnées q_1 et q_2 sont les deux paramètres sur les surfaces de la famille (1.11).

Dans ce système de coordonnées curvilignes — que nous noterons T_q — la métrique de l'espace s'écrit :

$$ds^2 = g_{ij} dq_i dq_j, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.12)$$

en utilisant la notation habituelle :

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j},$$

x_k ($k = 1, 2, 3$) étant les coordonnées cartésiennes rectangulaires.

On observe que, par suite du choix du système de coordonnées T_q , on a :

$$g_{13} = 0, \quad g_{23} = 0, \quad (1.13)$$

et

$$g = \det |g_{ij}| = g_{33} G, \text{ où } G = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2. \quad (1.14)$$

Pour les composantes contravariantes g^{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) du tenseur fondamental, on obtient les valeurs :

$$g^{11} = \frac{1}{G} g_{22}, \quad g^{22} = \frac{1}{G} g_{11}, \quad g^{12} = \frac{-1}{G} g_{12}, \quad g^{13} = 0, \quad g^{23} = 0, \quad g^{33} = \frac{1}{g_{33}}. \quad (1.15)$$

Puisque la famille de surfaces (1.11) a une signification physique bien déterminée, elle ne peut pas être choisie de façon arbitraire; par

conséquent, on ne peut pas, en général, imposer la condition d'orthogonalité au système de coordonnées T_q utilisé; en effet, une telle condition obligerait la famille de surfaces (1.11) à appartenir à un système triple orthogonal de familles de surfaces, ce qui n'est pas toujours vrai. Nous supposons donc $g_{12} \neq 0$ dans le domaine $(\mathfrak{D})$.

Nous désignerons, par rapport au système de coordonnées T_q choisi, respectivement par u^i , ω^i ($i = 1, 2, 3$) les composantes contravariantes, et par u_i , ω_i ($i = 1, 2, 3$) les composantes covariantes des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$. Comme les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\omega}$ appartiennent, en chaque point $M \in \mathfrak{D}$, au plan tangent à la surface de la famille (1.11) qui passe par M , on en déduit que :

$$u_3 \equiv 0, u^3 \equiv 0, \omega_3 \equiv 0, \omega^3 \equiv 0, \text{ dans } (\mathfrak{D}). \quad (1.16)$$

En écrivant l'équation de continuité ($I_{s.a}$) dans le système de coordonnées T_q introduit, et en tenant compte des relations (1.13) et (1.16), on déduit l'existence d'une fonction $\psi(q_1, q_2, q_3)$, de classe C^2 par rapport aux variables q_1 et q_2 , telle que :

$$u^1 = \frac{1}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \quad u^2 = -\frac{1}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial q_1}. \quad (1.17)$$

Il résulte immédiatement de cette relation que :

$$\psi(q_1, q_2, q_{3,0}) = \text{const.} \quad (1.18)$$

est l'équation des lignes de courant sur la surface $H(x_1, x_2, x_3) = q_{3,0}$ et par analogie avec les écoulements plans et irrotationnels, $\psi(q_1, q_2, q_3)$ est dite « fonction de courant ».

En même temps, la condition $\omega^3 = 0$, exprimée par rapport aux composantes covariantes du vecteur $\vec{v}$, met en évidence l'existence d'une autre fonction $\varphi(q_1, q_2, q_3)$, telle que :

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}. \quad (1.19)$$

On doit supposer aussi que cette fonction φ est de classe C^2 par rapport aux trois variables q_i .

On déduit très facilement que l'équation des lignes de tourbillon sur la surface $H(x_1, x_2, x_3) = q_{3,0}$ est :

$$\lambda(q_1, q_2, q_{3,0}) \equiv \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right)_{q_3 = q_{3,0}} = \text{const.} \quad (1.20)$$

En vertu de la même analogie, la fonction $\varphi(q_1, q_2, q_3)$ est nommée « fonction potentielle » de l'écoulement.

On démontre aussi que, sur chaque surface (1.11), les familles de courbes $\varphi(q_1, q_2, q_{3,0}) = \text{const.}$ et $\psi(q_1, q_2, q_{3,0}) = \text{const.}$ sont orthogonales en chaque point $M \in \mathfrak{D}$.

Les relations, qui relient les composantes contravariantes aux composantes covariantes d'un vecteur, donnent le système d'équations aux dérivées partielles auquel doivent satisfaire les fonctions φ et ψ sur chaque surface de la famille (1.11) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} &= \frac{g_{11}}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \frac{g_{12}}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial q_1}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} &= \frac{g_{12}}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \frac{g_{22}}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial q_1}, \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

ou, sous la forme équivalente :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} &= \frac{g_{12}}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \frac{g_{11}}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \\ \frac{1}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} &= \frac{g_{22}}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \frac{g_{12}}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Si l'on élimine la fonction φ entre les deux équations (1.21), et la fonction ψ entre les deux équations (1.22), on obtient les équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles doivent satisfaire les fonctions φ et ψ sur chaque surface de la famille (1.11) :

$$g^{11} \frac{\partial^2 \psi}{(\partial q_1)^2} + 2g^{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_1 \partial q_2} + g^{22} \frac{\partial^2 \psi}{(\partial q_2)^2} + \dots = 0, \quad (1.23)$$

$$g^{11} \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial q_1)^2} + 2g^{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial q_2} + g^{22} \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial q_2)^2} + \dots = 0, \quad (1.24)$$

les points remplaçant les termes du premier ordre.

En conclusion, la méthode proposée par V. VALCOVICI remplace le système d'équations (I_s) par un autre système, qui contient, par exemple, les relations (1.21), ($I_s.c$) et ($I_s.d$) ; on a donc quatre relations scalaires, indépendantes entre elles, pour les cinq fonctions inconnues : H , φ , ψ , ρ et p .

Mais, pour la résolution effective d'un problème, on voit que cette méthode présente de grandes difficultés, puisqu'elle suppose, comme première étape, la détermination de la fonction $H(x_1, x_2, x_3)$; or, la forme des équations précédentes n'offre pas cette possibilité.

Toutefois, en utilisant ces résultats ainsi que d'autres résultats connus, nous réussirons, au chapitre suivant, à éliminer ce genre de difficultés.

§ 4. Il reste encore à préciser une question importante, qui ne figure pas dans le travail résumé précédemment. Les fonctions φ et ψ doivent satisfaire aussi à une autre équation, que l'on peut obtenir, par exemple, en écrivant l'équation vectorielle ($I_s.b$) dans le système de coordon-

nées T_q ; l'égalisation des composantes covariantes des vecteurs des deux membres de cette équation, donne :

$$\frac{g_{33}}{\sqrt{g}}(u_1 \omega_2 - u_2 \omega_1) = 1. \quad (1.25)$$

Mais :

$$\omega^1 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial u_2}{\partial q_3} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2 \partial q_3}, \quad \omega^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial u_1}{\partial q_3} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial q_3},$$

donc :

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= q_{1j} \omega^j = -\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2 \partial q_3} + \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial q_3}, \\ \omega_2 &= g_{2j} \omega^j = -\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2 \partial q_3} + \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial q_3}. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

En introduisant les relations (1.19), (1.20) et (1.26) dans la relation (1.25), on obtient :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_1} \left(g_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - g_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) - \frac{\partial \lambda}{\partial q_2} \left(g_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - g_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) = G,$$

et, en tenant compte de (1.22), on peut écrire :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_1} \frac{G}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \frac{\partial \lambda}{\partial q_2} \frac{G}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} = G.$$

On obtient donc l'équation :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \frac{\partial \lambda}{\partial q_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} = \rho \sqrt{g}, \quad (1.27)$$

qui peut être écrite aussi sous la forme :

$$\frac{D(\lambda, \psi)}{D(q_1, q_2)} = \rho \sqrt{g}. \quad (1.27')$$

Nous avons donc trouvé une nouvelle équation à laquelle doivent satisfaire les fonctions φ , ψ et qui s'ajoute aux équations trouvées précédemment.

On observe aisément qu'on peut obtenir le même genre de résultats pour les classes d'écoulements (C_H) et (C_i); prenons, par exemple, la classe des écoulements isoénergétiques (C_H). Dans ce cas, si l'on considère la famille de surfaces isentropiques :

$$S(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}, \quad (1.11')$$

on peut introduire de la même façon un système de coordonnées curvilignes $T_q(q_1, q_2, q_3)$, en choisissant comme courbes $q_3 = \text{variable}$ la famille de courbes orthogonales à la famille de surfaces isentropiques (1.11'); q_1 et q_2 sont deux paramètres arbitraires et indépendants sur les surfaces de cette famille.

On utilise aussi les composantes contravariantes et covariantes des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$ et on introduit de la même façon les fonctions φ et ψ ; on observe que toutes les relations, de (1.12) à (1.24), garderont la même forme et, en particulier, les équations du système (1.21) ou (1.22).

En effet, pour obtenir toutes ces relations il faut recourir :

- a) à un certain choix du système de coordonnées curvilignes T_q , choix identique dans les deux cas;
- b) à l'équation de continuité, qui est la même;
- c) aux relations similaires :

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} \cdot \text{grad } H &= 0, \\ \vec{\omega} \cdot \text{grad } H &= 0, \end{aligned} \right\} (1.28) \quad \text{et} \quad \left. \begin{aligned} \vec{v} \cdot \text{grad } S &= 0, \\ \vec{\omega} \cdot \text{grad } S &= 0, \end{aligned} \right\} (1.28')$$

qui sont des conséquences des équations de HELMHOLTZ ($I_{S.b}$) et respectivement de CROCCO ($I_{H.b}$).

Evidemment, dans ces deux cas seulement la forme des relations considérées est la même, mais elles ne sont pas identiques, car les variables (q_i) utilisées sont différentes dans les deux cas envisagés.

La différence de forme, qui existe entre l'équation de HELMHOLTZ ($I_{S.b}$) et l'équation de CROCCO ($I_{H.b}$), n'intervient que dans la forme de la relation (1.27); dans le cas des écoulements isoénergétiques (C_H), on obtient cette dernière équation sous une forme un peu différente :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \frac{\partial \lambda}{\partial q_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} = - \rho T \sqrt{g}, \quad (1.29)$$

ou :

$$\frac{D(\lambda, \psi)}{D(q_1, q_2)} = - \rho T \sqrt{g}, \quad (1.29')$$

en utilisant le même procédé de calcul.

Tous ces résultats peuvent être facilement transposés au cas de la classe d'écoulements (C_i); en effet, le choix convenable des fonctions introduites permet de déduire ce cas en faisant $\rho = 1$ dans toutes les relations obtenues par V. VALCOVICI.

Enfin, nous retiendrons du travail de V. VALCOVICI [43] les deux idées suivantes :

- le choix du système de coordonnées curvilignes T_q , naturellement lié aux éléments de l'écoulement, et

- l'introduction des composantes covariantes et contravariantes des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\omega}$, imposée par l'utilisation d'un système de coordonnées curvilignes.

On comprend mieux à présent pourquoi nous avons été obligés de limiter nos développements aux trois classes d'écoulements précisées précédemment et pourquoi nous pouvons faire une étude parallèle de ces classes d'écoulements.

B. — Introduction des fonctions analytiques « généralisées » d'une variable complexe⁸⁾

§ 5. Nous considérons une surface quelconque de la famille de surfaces isoénergétiques (1.11) :

$$H(x_1, x_2, x_3) = q_{3,0} \quad (1.30)$$

et supposons que chaque surface de cette famille est analytique ; autrement dit, supposons que les coefficients g_{ij} de la métrique de la surface (1.30) :

$$ds^2 = g_{11} (dq_1)^2 + 2 g_{12} dq_1 dq_2 + g_{22} (dq_2)^2 \quad (1.31)$$

sont des fonctions analytiques de q_1 et q_2 dans un certain domaine de cette surface.

Il faut d'abord préciser que, dans la section B, toutes les fonctions utilisées sont considérées comme fonctions de deux variables q_1 et q_2 sur une surface (1.30) donnée, tandis que q_3 est un paramètre, constant sur chaque surface (1.30).

Ainsi, les coefficients g_{ij} ($i, j = 1, 2$) de (1.31) sont obtenus en faisant $q_3 = q_{3,0}$ dans les expressions des coefficients respectifs de la métrique (1.12) ; ils seront donc différents d'une surface de la famille (1.11) à l'autre.

On considère la décomposition en facteurs suivante :

$$ds^2 = \left(\sqrt{g_{11}} dq_1 + \frac{g_{12} + i\sqrt{G}}{\sqrt{g_{11}}} dq_2 \right) \left(\sqrt{g_{11}} dq_1 + \frac{g_{12} - i\sqrt{G}}{\sqrt{g_{11}}} dq_2 \right) \quad (1.32)$$

⁸⁾ Cette classe de fonctions a été très largement étudiée ces derniers temps par plusieurs chercheurs, surtout sous son aspect qualitatif. Les principaux auteurs travaillant dans cette direction sont :

— I. N. VEKUA, qui a groupé ses résultats ainsi que d'autres résultats récents dans son livre *Les fonctions analytiques généralisées*, publié à Moscou en 1959 (en langue russe) ; il utilise le terme mentionné dans le titre de son livre ;

— L. BERS, qui a étudié cette classe de fonctions dans plusieurs travaux et qui a dénommé ces fonctions « pseudoanalytiques ».

L'origine de cette théorie se trouve dans la thèse de doctorat (1912) du mathématicien roumain D. POMPEIU ; plusieurs autres mathématiciens roumains, parmi lesquels nous citons : G. CĂLUGĂREANU [12], M. GHERMĂNESCU [23], Gr. MOISIL [29]—[31], M. NICULESCU [32] et N. TEODORESCU [37]—[40], ont beaucoup contribué à son développement.

Dans ce travail nous nous référerons en particulier aux travaux de L. BERS et I. N. VEKUA, en choisissant parmi eux la présentation la plus adéquate pour nos développements.

pour la métrique (1.31), où :

$$G = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (1.33)$$

Des résultats classiques de la théorie des équations différentielles analytiques assurent que, sous les hypothèses formulées plus haut sur les coefficients g_{ij} , l'expression :

$$\sqrt{g_{11}} dq_1 + \frac{g_{12} + i\sqrt{G}}{\sqrt{g_{11}}} dq_2$$

admet un facteur intégrant $\mu(q_1, q_2)$ et que, en même temps,

$$\sqrt{g_{11}} dq_1 + \frac{g_{12} - i\sqrt{G}}{\sqrt{g_{11}}} dq_2$$

admet, comme facteur intégrant, la fonction conjuguée $\bar{\mu}(q_1, q_2)$. Nous noterons :

$$\left. \begin{aligned} \mu \left[\sqrt{g_{11}} dq_1 + \frac{g_{12} + i\sqrt{G}}{\sqrt{g_{11}}} dq_2 \right] &= dZ, \\ \bar{\mu} \left[\sqrt{g_{11}} dq_1 + \frac{g_{12} - i\sqrt{G}}{\sqrt{g_{11}}} dq_2 \right] &= d\bar{Z}, \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

donc :

$$|\mu^2| ds^2 = dZ d\bar{Z} = da^2 + db^2, \quad (1.35)$$

où nous avons noté :

$$Z = Z(q_1, q_2) = a(q_1, q_2) + ib(q_1, q_2).^9 \quad (1.36)$$

Ces résultats peuvent être interprétés de deux façons différentes :

— Soit que l'on considère la transformation :

$$a = a(q_1, q_2), \quad b = b(q_1, q_2), \quad (1.37)$$

comme transformant un domaine (Δ) situé sur la surface (1.30), en un domaine (Δ') du plan complexe $Z = a + ib$.

— Soit que l'on considère — comme BELTRAMI [1] et U. CISOITI [13] — la variable Z , introduite par la relation (1.36), comme une variable complexe sur la surface (1.30).

Les mêmes résultats peuvent être établis dans le cadre d'hypothèses plus générales.

⁹⁾ Pour simplifier l'écriture, le paramètre q_3 n'est plus écrit dans les expressions des fonctions introduites : z, μ, a, b, g_{ij} , etc... ; mais, bien entendu, toutes ces relations dépendent aussi de q_3 et elles varient d'une surface (1.30) à l'autre.

Nous supposons maintenant la métrique (1.31) continue HÖLDER, c'est-à-dire nous supposons que ses coefficients g_{ij} sont des fonctions continues HÖLDER de q_1 et q_2 et qu'ils satisfont aux conditions :

$$g_{11} > 0, G = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2 > 0. \quad (1.38)$$

Dans [3], LIPMAN BERS a appelé « *homéomorphisme conforme par rapport à une métrique continue HÖLDER* » un homéomorphisme de la forme (1.37) qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ \text{ Les fonctions } a(q_1, q_2), b(q_1, q_2) \text{ ont des dérivées partielles} \\ \text{du premier ordre continues.} \\ 2^\circ \frac{D(a, b)}{D(q_1, q_2)} > 0. \\ 3^\circ da^2 + db^2 = \mu^2 ds^2, \text{ avec } \mu^2(q_1, q_2) > 0 \text{ dans le domaine} \\ \text{considéré.} \end{array} \right\} \quad (1.39)$$

Dans le mémoire qui vient d'être cité, il est démontrée l'existence d'un tel homéomorphisme, conforme par rapport à une métrique continue HÖLDER donnée, et on montre que cet homéomorphisme est également conforme par rapport à toute métrique, qui s'obtient en multipliant tous les coefficients de la métrique donnée par la même fonction positive $\mu^2(q_1, q_2)$; on démontre aussi que tous les autres homéomorphismes du même domaine, qui sont conformes par rapport à la métrique continue HÖLDER donnée, déterminent des fonctions analytiques de la variable complexe $Z = a + ib$, définie par l'homéomorphisme initial. Toutes ces notions sont utilisées dans le théorème suivant :

THÉORÈME DE L. BERS. « On considère le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \beta_{11} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \beta_{12} \frac{\partial v}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \beta_{21} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \beta_{22} \frac{\partial v}{\partial \eta}. \end{array} \right\} \quad (1.40)$$

Si :

1° les coefficients $\beta_{ik}(\xi, \eta)$, ($i, k = 1, 2$) sont des fonctions réelles, continues HÖLDER et définies dans un domaine (Δ) de

$$\zeta = \xi + i\eta;$$

2° le système d'équations (1.40) est elliptique, c'est-à-dire que :

$$\beta_{12} > 0, 4\beta_{12} \beta_{21} + (\beta_{11} - \beta_{22})^2 < 0; \quad (1.41)$$

3° $Z = Z(\zeta) = a + ib$ est un homéomorphisme conforme (du domaine (Δ) de (ζ) sur un domaine (Δ_1) de (Z)) par rapport à la métrique continue HÖLDER :

$$\beta_{12} d\xi^2 + (\beta_{22} - \beta_{11}) d\xi d\eta - \beta_{21} d\eta^2; \quad (1.42)$$

(u, v) sera alors une solution du système (1.40) si $w = u + iv$, considérée comme fonction de $Z = a + ib$, est une fonction pseudoanalytique de deuxième espèce¹⁰⁾ par rapport au système :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial a} &= \tau \frac{\partial v}{\partial a} + \sigma \frac{\partial v}{\partial b}, \\ \frac{\partial u}{\partial b} &= -\sigma \frac{\partial v}{\partial a} + \tau \frac{\partial v}{\partial b}, \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

où :

$$\tau = \frac{1}{2}(\beta_{11} + \beta_{22}), \quad \sigma = \frac{1}{2}[-4\beta_{12}\beta_{21} - (\beta_{11} - \beta_{22})^2]^{\frac{1}{2}} > 0, \quad (1.44)$$

et seulement dans ce cas».

§ 6. Nous nous proposons maintenant d'appliquer ces résultats dus à L. BERS et, en particulier, ce dernier théorème à notre problème. En prenant pour les coefficients β_{ik} du système (1.40) les expressions suivantes :

$$\beta_{11} = \frac{-g_{12}}{\rho\sqrt{g}}, \quad \beta_{12} = \frac{g_{11}}{\rho\sqrt{g}}, \quad \beta_{21} = \frac{-g_{22}}{\rho\sqrt{g}}, \quad \beta_{22} = \frac{g_{12}}{\rho\sqrt{g}}, \quad (1.45)$$

les systèmes d'équations (1.21) et (1.40) auront la même forme.

La première condition imposée par le théorème de L. BERS est satisfaite si l'on suppose que les coefficients g_{ij} de la métrique (1.31) et la masse spécifique ρ sont des fonctions continues HÖLDER dans le domaine (Δ) de la surface (1.30), dans lequel a lieu l'écoulement subsonique étudié.

La deuxième condition exigée par ce théorème s'écrit :

$$\frac{g_{11}}{\rho\sqrt{g}} > 0, \quad -\frac{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}{\rho^2 g} = -\frac{G}{\rho^2 g} < 0,$$

pour les valeurs (1.45) des coefficients β_{ik} ; en supposant $\rho > 0$, $\sqrt{g} > 0$, en tous les points du domaine (Δ) , on obtient pour ces conditions la forme suivante :

$$g_{11} > 0, \quad G > 0. \quad (1.46)$$

Par conséquent, si la métrique (1.31) est une métrique continue HÖLDER, les formules (1.38) et (1.46) montrent que la deuxième condition

¹⁰⁾ Une fonction $w(Z) = u + iv$ est appelée par L. BERS [3], [4], pseudoanalytique de deuxième espèce par rapport à un système d'équations de la forme (1.43) si les fonctions u et v sont de classe C^1 par rapport aux variables réelles (a, b) et si elles satisfont à un système d'équations de la forme (1.43), où τ et σ sont des fonctions réelles, continues Hölder, et $\sigma > 0$.

du théorème de L. BERS est satisfaite aussi pour le système d'équations (1.21)¹¹).

Enfin, pour les valeurs (1.45) des coefficients β_{ik} , la métrique (1.42) devient :

$$\frac{1}{\rho\sqrt{g}} [g_{11} (dq_1)^2 + 2 g_{12} dq_1 dq_2 + g_{22} (dq_2)^2] = \frac{1}{\rho\sqrt{g}} ds^2. \quad (1.47)$$

Si l'on suppose que l'homéomorphisme déterminé par (1.36) est conforme par rapport à la métrique continue HÖLDER (1.31) alors, comme on l'a déjà précisé, cet homéomorphisme sera aussi conforme par rapport à la métrique continue HÖLDER (1.47), car on a supposé $\rho > 0$, $\sqrt{g} > 0$.

En conclusion, les trois conditions imposées par le théorème de L. BERS seront satisfaites par le système d'équations (1.21) — dans un certain domaine (Δ) de la surface (1.30) — si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1° la métrique (1.31) est une métrique continue HÖLDER ;
 - 2° $\sqrt{g}$ et ρ sont des fonctions continues HÖLDER en (Δ) et prennent seulement des valeurs positives ;
 - 3° l'homéomorphisme (1.36), introduit par les relations (1.34), est conforme par rapport à la métrique continue HÖLDER (1.31).
- ($\mathfrak{F}_1$)

Il faut ajouter que, pour les valeurs (1.45) des coefficients β_{ik} , les fonctions σ et τ , définies par les relations (1.44), ont les valeurs suivantes :

$$\tau = 0, \quad \sigma = \frac{1}{2} \left[\frac{4g_{11}g_{22}}{\rho^2g} - \frac{4(g_{12})^2}{\rho^2g} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{G}}{\rho\sqrt{g}} = \frac{1}{\rho\sqrt{g_{33}}} \quad (1.48)$$

et on voit que la deuxième hypothèse de ($\mathfrak{F}_1$) entraîne $\sigma > 0$.

Nous avons donc obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME I. *Sur chaque surface isoénergétique de la famille (1.11), si les conditions ($\mathfrak{F}_1$) sont satisfaites et si la fonction $w = \varphi + i\psi$ — considérée comme fonction de la variable complexe $Z = a + ib$ introduite sur ces surfaces — est une fonction pseudoanalytique de deuxième espèce par rapport au système d'équations suivant :*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{1}{\rho\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \psi}{\partial b}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = -\frac{1}{\rho\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \psi}{\partial a}, \quad (1.49)$$

alors les fonctions φ et ψ forment une solution du système d'équations (1.21).

¹¹) On constate donc que le système (1.21) est, dans ce cas, elliptique, même lorsque le fluide est compressible. Ce résultat s'explique par le fait qu'on a supposé $q_3 = \text{const.}$, en réduisant ainsi le nombre des variables indépendantes de trois à deux ; on précise de nouveau que toutes les relations établies dans cette section sont valables sur chaque surface de la famille (1.30), mais elles varient d'une surface de cette famille à l'autre.

On observe ainsi l'analogie mise en évidence, d'une part entre la fonction φ et la fonction potentielle d'un écoulement plan, subsonique et irrotationnel, d'autre part entre ψ et la fonction de courant du même type d'écoulement.

Notons que, dans ce cas, $\tau = 0$ et le système d'équations (1.43) prendra donc la forme particulière (1.49); cette forme particulière a été également étudiée par L. BERS [5]. Dans ce travail, L. BERS dit qu'une fonction $w(Z) = \varphi + i\psi$ ($Z = a + ib$) est «pseudoanalytique par rapport à la fonction admissible¹²⁾ $\sigma(a, b)$ en un point Z_0 » si, dans tout voisinage du point Z_0 , les dérivées partielles des fonctions φ et ψ — par rapport aux variables réelles a et b — existent, sont continues et satisfont au système d'équations suivant :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = \sigma(a, b) \frac{\partial \psi}{\partial b}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = -\sigma(a, b) \frac{\partial \psi}{\partial a}. \quad (1.50)$$

De même, la fonction $w(Z) = \varphi + i\psi$ sera dite «pseudoanalytique par rapport à la fonction admissible $\sigma(a, b)$ dans un domaine (Δ) » si elle satisfait aux propriétés indiquées plus haut en chaque point $Z_0 \in \Delta$.

Le résultat obtenu antérieurement peut donc être formulé aussi de la façon suivante :

THÉOREME I'. *Sur chaque surface isoénergétique de la famille (1.11), les fonctions φ et ψ forment une solution du système d'équations (1.21) si les conditions $(\mathfrak{F}_1)$ sont satisfaites et si la fonction $w(Z) = \varphi + i\psi$ — considérée comme fonction de la variable complexe $Z = a + ib$ introduite sur ces surfaces — est une fonction pseudoanalytique par rapport à la fonction admissible :*

$$\sigma(a, b) = \frac{1}{\rho \sqrt{g_{33}}}$$

dans le domaine (Δ) considéré.

En tenant compte de la définition d'une fonction admissible — au sens utilisé par L. BERS —, on obtient facilement les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions ρ et $\sqrt{g_{33}}$, pour que $\sigma = \frac{1}{\rho \sqrt{g_{33}}}$ soit une fonction admissible.

Cas particuliers

1° Si le fluide est incompressible et si g_{33} est constante dans le domaine considéré (Δ) , ou si l'on a une loi de distribution de la masse spécifique ρ telle que : $\rho \sqrt{g_{33}} = \text{constante}$, la relation (1.49) montre que

¹²⁾ L. BERS dit qu'une fonction $\sigma(a, b)$ est «admissible» dans un domaine (Δ) si elle est définie dans ce domaine et si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1° $\sigma(a, b) > 0$ pour tout point $(a, b) \in \Delta$,

2° $\frac{\partial \sigma}{\partial a}, \frac{\partial \sigma}{\partial b}$ existent et satisfont à une «condition HÖLDER» dans le domaine (Δ) .

$w = \varphi + i\psi$ est une fonction analytique de la variable complexe $Z = a + ib$ dans le domaine (Δ) .

2° Si la fonction $\rho/\sqrt{g_{33}}$ peut être décomposée en facteurs sous la forme : $\gamma_1(a) \cdot \gamma_2(b)$ — avec les variables a et b séparées — alors $w = \varphi + i\psi$ est un cas particulier de fonction pseudoanalytique, dénommée par L. BERS [6] « fonction Σ — monogène ».

D'autres résultats remarquables, dans cette direction, peuvent être trouvés dans un travail de PH. HARTMANN et A. WINTER [24] et, bien entendu, dans le livre de I. N. VEKUA¹³⁾.

Tous les résultats contenus dans cette section B ont été établis pour la classe d'écoulements (C_s) , mais ils restent les mêmes dans les deux autres cas considérés — les classes d'écoulements (C_H) et (C_i) —. Ceci est évident, puisque le système d'équations (1.21) conserve la même forme dans les trois cas étudiés. Nous remarquerons seulement que tous ces résultats ont une forme plus simple pour les écoulements de la classe (C_i) ; dans ce cas, le système d'équations (1.21) — où $\rho = 1$ — devient le système de BELTRAMI¹³⁾.

Pour conclure, nous dirons que nous avons trouvé les conditions permettant d'établir une correspondance — sur chaque surface isoénergétique ou isentropique — entre les écoulements subsoniques sur ces surfaces et les fonctions pseudoanalytiques $w(Z) = \varphi + i\psi$, considérées comme fonctions de la variable complexe $Z = a + ib$ introduite sur ces surfaces. Par analogie, nous dirons que la fonction $w(Z)$ est « le potentiel complexe » de l'écoulement sur la surface isoénergétique ou isentropique considérée.

Il est certain que l'intérêt de cette correspondance est, pour le moment, très réduit, car ni le rôle de la variable q_3 , ni celui de la relation (1.27) (ou (1.29)) ne sont encore clairement définis. De plus, la difficulté essentielle reste la même que dans la méthode de V. VALCOVICI, à savoir la nécessité de connaître d'abord la fonction $H(x_1, x_2, x_3)$ ou la fonction $S(x_1, x_2, x_3)$.

Comme les fonctions $H(x_1, x_2, x_3)$ et $S(x_1, x_2, x_3)$ ont des significations physiques bien déterminées, nous ne pouvons pas essayer une méthode inverse et construire des exemples d'écoulements de ce type sans connaître les conditions nécessaires ou les équations auxquelles ces fonctions doivent satisfaire.

Toutefois, nous avons introduit ces éléments dans ce chapitre général pour avoir ensuite la possibilité de les élucider et utiliser dans les développements qui vont suivre.

CHAPITRE II

Représentation intrinsèque du problème étudié

§ 1. Dans ce chapitre nous nous proposons de remplacer les systèmes d'équations classiques (I_s) , (I_H) et (I_i) par d'autres systèmes d'équations; plus précisément, notre attention sera fixée seulement sur les deux pre-

¹³⁾ Voir I. N. VEKUA [44], p. 95.

mières équations vectorielles de chacun de ces systèmes. Les calculs étant analogues dans les trois cas, nous ferons les développements seulement pour le système d'équations (I_s); les résultats pour les deux autres cas seront donnés directement.

Considérons, comme point de départ, la représentation habituelle d'un vecteur $\vec{a}$ dans un système arbitraire de coordonnées curvilignes :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \sqrt{g^{11}} a_1 \vec{e}^1 + \sqrt{g^{22}} a_2 \vec{e}^2 + \sqrt{g^{33}} a_3 \vec{e}^3 = \\ &= \sqrt{g_{11}} a^1 \vec{e}_1 + \sqrt{g_{22}} a^2 \vec{e}_2 + \sqrt{g_{33}} a^3 \vec{e}_3,\end{aligned}\quad (2.1)$$

les notations étant celles qui sont utilisées habituellement.

Si l'on choisit, comme système de coordonnées curvilignes, le système de coordonnées T_q introduit au (Ch. I, § 3) et si l'on tient compte des relations (1.19) et (2.1), on obtient pour la vitesse $\vec{v}$ la représentation suivante :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \sqrt{g^{11}} u_1 \vec{e}^1 + \sqrt{g^{22}} u_2 \vec{e}^2 = \sqrt{g^{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \vec{e}^1 + \sqrt{g^{22}} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \vec{e}^2 = \\ &= \text{grad}_{q_i} \varphi - \sqrt{g^{33}} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \vec{e}^3 = \text{grad } \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \text{grad } q_3 = \text{grad } \varphi - \lambda \text{grad } q_3,\end{aligned}$$

où $\lambda(q_1, q_2, q_3)$ est donné par (1.20).

Cette représentation du vecteur $\vec{v}$ par les gradients de deux fonctions présente l'avantage d'être une forme invariante, indépendante du choix du système de coordonnées.

Soit :

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

ou

$$x_k = x_k(q_1, q_2, q_3), \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.2')$$

le changement de coordonnées introduit au (Ch. I, § 3) et qui a établi la correspondance entre le système de coordonnées cartésien orthogonal T_x et le système de coordonnées curvilignes T_q .

En introduisant les notations :

$$\left. \begin{aligned}\varphi(q_1, q_2, q_3) &\equiv \varphi[q_1(x_1, x_2, x_3), q_2(x_1, x_2, x_3), q_3(x_1, x_2, x_3)] \equiv \\ &\equiv \Phi(x_1, x_2, x_3), \\ \psi(q_1, q_2, q_3) &\equiv \psi[q_1(x_1, x_2, x_3), q_2(x_1, x_2, x_3), q_3(x_1, x_2, x_3)] \equiv \\ &\equiv \Psi(x_1, x_2, x_3),\end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

par rapport au changement de variables (2.2), on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_3} = \text{grad } \Phi \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = \sqrt{g_{33}} \text{grad } \Phi \cdot \vec{e}_3 = \\ &= \frac{1}{g^{33}} \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } q_3 = \frac{1}{|\text{grad } q_3|^2} \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } q_3,\end{aligned}$$

où toutes les opérations vectorielles ont été effectuées dans le système de coordonnées T_x . On a donc obtenu une représentation invariante de la fonction λ :

$$\lambda \equiv \lambda(q_1, q_2, q_3) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \equiv \frac{1}{|\text{grad } H|^2} \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } H \equiv \Lambda(x_1, x_2, x_3). \quad (2.4)$$

Dans la suite, nous utiliserons :

— les symboles $\varphi, \psi, \lambda, q_3$, pour exprimer la dépendance des fonctions introduites par rapport aux variables q_1, q_2, q_3 ,

— les symboles Φ, Ψ, Λ, H , pour exprimer la dépendance des mêmes fonctions par rapport aux variables x_1, x_2, x_3 .

Le vecteur $\vec{v}$ est alors exprimé, dans le système de coordonnées T_x , par :

$$\vec{v} = \text{grad } \Phi - \Lambda \text{ grad } H. \quad (2.5)$$

Cette représentation du champ vectoriel $\vec{v}$ est générale et tout champ vectoriel peut être représenté sous une forme similaire par trois fonctions ; mais on a trouvé ici la signification particulière des fonctions utilisées (Φ, Λ et H) pour le champ de la vitesse d'un écoulement de classe (C_s).

D'autre part, l'équation de continuité ($I_{s,a}$) entraîne la représentation du vecteur $\vec{\rho v}$ par le rotationnel d'un autre vecteur :

$$\rho \vec{v} = \text{rot } \vec{R}, \quad (2.6)$$

que nous désignerons par $\vec{R}$. Si R_i ($i = 1, 2, 3$) sont ses composantes covariantes par rapport au système de coordonnées curvilignes T_a , on aura, en tenant compte des relations (1.17), les égalités suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \rho u^1 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial R_3}{\partial q_2} - \frac{\partial R_2}{\partial q_3} \right), \\ \rho u^2 &= \frac{-1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial R_1}{\partial q_3} - \frac{\partial R_3}{\partial q_1} \right), \\ \rho u^3 &= 0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial R_2}{\partial q_1} - \frac{\partial R_1}{\partial q_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

La dernière relation de (2.7) assure l'existence d'une fonction $\tau(q_1, q_2, q_3)$, au moins deux fois dérivable par rapport à q_1 et q_2 et une fois par rapport à q_3 , et telle que :

$$R_1 = \frac{\partial \tau}{\partial q_1}, \quad R_2 = \frac{\partial \tau}{\partial q_2}. \quad (2.8)$$

En introduisant (2.8) dans les deux premières relations (2.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial q_3} &= \frac{\partial^2 \tau}{\partial q_1 \partial q_3} = \frac{\partial (R_3 - \psi)}{\partial q_1}, \\ \frac{\partial R_2}{\partial q_3} &= \frac{\partial^2 \tau}{\partial q_2 \partial q_3} = \frac{\partial (R_3 - \psi)}{\partial q_2} \end{aligned}$$

et par suite :

$$R_3 - \psi = \frac{\partial \tau}{\partial q_3} + \tau_1(q_3), \quad (2.9)$$

où $\tau_1(q_3)$ est une fonction arbitraire, qui ne dépend que de q_3 .

Les relations (2.8) et (2.9) peuvent être écrites ensemble sous la forme suivante :

$$R_i = \frac{\partial \tau}{\partial q_i} + \delta_{i3}(\psi + \tau_1), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.10)$$

où δ_{i3} est le symbole de KRÖNECKER. Par conséquent :

$$\vec{R} = \text{grad}_{q_i} \tau + \sqrt{g^{33}}(\psi + \tau_1) \vec{e}^3 = \text{grad}_{q_i} \tau + (\psi + \tau_1) \text{grad}_{q_i} q_3$$

et, en introduisant les notations :

$$\tau \equiv \tau(q_1, q_2, q_3) \equiv \tilde{\tau}(x_1, x_2, x_3), \quad \tau_1 \equiv \tau_1(q_3) \equiv \tilde{\tau}_1(x_1, x_2, x_3),$$

par rapport au changement de coordonnées (2.2), le vecteur $\vec{R}$ est représenté dans le système de coordonnées T_x par :

$$\vec{R} = \text{grad } \tilde{\tau} + (\Psi + \tilde{\tau}_1) \text{grad } H, \quad (2.11)$$

donc : $\rho \vec{v} = \text{rot } \vec{R} = \text{grad } (\Psi + \tilde{\tau}_1) \wedge \text{grad } H$.

On voit facilement que :

$$\text{grad } \tilde{\tau}_1 = \frac{d\tilde{\tau}_1}{dH} \text{grad } H.$$

D'où une nouvelle représentation vectorielle de la vitesse $\vec{v}$:

$$\rho \vec{v} = \text{rot } \vec{R} = \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H, \quad (2.12)$$

qui, dans le système de coordonnées curvilignes T_q , prend une forme équivalente :

$$\rho \vec{v} = \text{rot } \vec{R} = \text{grad } \psi \wedge \text{grad } q_3. \quad (2.12')$$

On constate que la fonction Ψ est déterminée en faisant abstraction d'une fonction additive $\tilde{\tau}_1$, qui ne dépend que de H .

§ 2. Les relations (2.5) et (2.12) donnent l'équation vectorielle suivante :

$$\text{grad } \Phi - \Lambda \text{ grad } H = \frac{1}{\rho} \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H, \quad (2.13)$$

c'est-à-dire trois équations scalaires auxquelles doivent satisfaire les quatre fonctions introduites : Φ , Λ , Ψ et H .

Pour le tourbillon $\vec{\omega}$, l'équation (2.5) donne :

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} = \text{grad } H \wedge \text{grad } \Lambda. \quad (2.14)$$

En écrivant que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\omega}$, donnés par les expressions (2.12) et (2.14), satisfont à l'équation de HELMHOLTZ (I_s.b), on obtient :

$$\begin{aligned}\text{grad } H &= \vec{v} \wedge \vec{\omega} = \frac{1}{\rho} (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) \wedge \vec{\omega} = \frac{1}{\rho} (\vec{\omega} \cdot \text{grad } \Psi) \text{ grad } H = \\ &= \vec{v} \wedge (\text{grad } H \wedge \text{grad } \Lambda) = (\vec{v} \cdot \text{grad } \Lambda) \text{ grad } H,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \Lambda = \frac{1}{\rho} \vec{\omega} \cdot \text{grad } \Psi = \frac{1}{\rho} (\text{grad } \Lambda \wedge \text{grad } \Psi) \cdot \text{grad } H = 1 \quad (2.15)$$

ou, sous une forme équivalente :

$$\frac{D(\Lambda, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \rho. \quad (2.16)$$

Dans le système de coordonnées curvilignes T_q , les relations (2.13) et (2.14) s'écrivent :

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi - \lambda \text{ grad } q_3 = \frac{1}{\rho} \text{grad } \psi \wedge \text{grad } q_3, \quad (2.13')$$

$$\vec{\omega} = \text{grad } q_3 \wedge \text{grad } \lambda. \quad (2.14')$$

En partant de ces dernières relations, on retrouve les expressions (1.17), (1.19) et (1.26) des composantes covariantes et contravariantes des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\omega}$; on voit aussi que l'équation vectorielle (2.13') est équivalente au système d'équations (1.21).

Une démonstration très simple prouvera l'équivalence des équations (1.27') et (2.16). Soit g la valeur du déterminant fondamental ($g = \det |g_{ij}|$) dans le système de coordonnées T_q , et $\bar{g} = 1$ la valeur du même déterminant fondamental dans le système de coordonnées T_x .

Le changement de coordonnées (2.2) transforme le déterminant fondamental de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\sqrt{g} &= \sqrt{\bar{g}} \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(q_1, q_2, q_3)} = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(q_1, q_2, q_3)} = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(\Lambda, \Psi, H)} \frac{D(\Lambda, \Psi, H)}{D(q_1, q_2, q_3)} = \\ &= \frac{1}{\frac{D(\Lambda, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)}} \frac{D(\lambda, \psi, q_3)}{D(q_1, q_2, q_3)} = \frac{1}{\rho} \frac{D(\lambda, \psi, q_3)}{D(q_1, q_2, q_3)} = \frac{1}{\rho} \frac{D(\lambda, \psi)}{D(q_1, q_2)}, \quad (2.17)\end{aligned}$$

et l'équivalence est ainsi démontrée ¹⁴⁾.

¹⁴⁾ Evidemment, toutes les relations, établies précédemment dans le système de coordonnées cartésien T_x , peuvent être déduites directement en partant des relations similaires écrites dans le système de coordonnées curvilignes T_q ; cette possibilité est assurée par l'invariance des opérations vectorielles utilisées, par rapport à un changement de coordonnées. Toutefois, nous avons préféré la présentation donnée dans les deux premiers paragraphes.

Il est facile d'observer aussi que la relation (2.4) ne constitue pas une condition supplémentaire, car elle est une conséquence de la relation (2.13); multipliant scalairement les deux membres de la relation (2.13) par le vecteur grad H , on retrouve la relation (2.4).

On voit donc que l'ensemble des quatre équations scalaires (2.13) et (2.16) est entièrement équivalent à l'ensemble des quatre équations scalaires $(I_{s.a})$ et $(I_{s.b})$; si l'on remplace le groupe des équations $(I_{s.a})$ et $(I_{s.b})$ par le groupe équivalent des équations (2.13) et (2.16), le système d'équations (I_s) sera remplacé par le système d'équations suivant :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \frac{D(\Lambda, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \rho, \\ (b) \quad & \text{grad } \Phi - \Lambda \text{ grad } H = \frac{1}{\rho} \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H, \\ (c) \quad & p = p(\rho), \\ (d) \quad & H = \int \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} d\rho + \frac{1}{2} V^2 + Q^{15}. \end{aligned} \right\} \quad (II_s)$$

Le système d'équations (II_s) comprend six équations scalaires pour six fonctions inconnues : $\Phi, \Psi, H, \Lambda, p, \rho$.

Nous avons déjà observé que des relations analogues peuvent être obtenues pour la classe d'écoulements (C_i) , si l'on remplace, dans toutes les relations précédentes, la densité ρ par l'unité.

On peut donc remplacer le système d'équations (I_i) par le système d'équations équivalent :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \frac{D(\Lambda, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)} = 1, \\ (b) \quad & \text{grad } \Phi - \Lambda \text{ grad } H = \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H, \\ (c) \quad & H = p + \frac{1}{2} V^2 + Q, \end{aligned} \right\} \quad (II_i)$$

donc, par un système de cinq équations scalaires pour les cinq fonctions inconnues Φ, Ψ, H, Λ et p .

Enfin, des observations et des calculs simples permettent d'obtenir facilement des résultats similaires pour la classe des écoulements isoénergétiques (C_H) . Dans ce cas, si l'on choisit, comme système de coordonnées curvilignes, le système de coordonnées T_q , introduit au (Ch. I, § 4) et qui utilise la famille de surfaces isentropiques (1.11'), toutes les relations de (2.3) à (2.14) gardent la même forme; il faut seulement remplacer partout la fonction $H(x_1, x_2, x_3)$ par la fonction $S(x_1, x_2, x_3)$.

¹⁵⁾ Dans cette équation il faut remplacer V^2 par sa valeur en fonction de Φ, Ψ, Λ, H et ρ , en utilisant dans ce but les relations (2.5) ou (2.12).

En effet, ces relations sont des conséquences des propriétés analogues (a, b, c) (voir Ch. I, § 4).

Un calcul simple permet de remplacer les relations (2.15) et (2.16) par les relations similaires :

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \Lambda = \frac{1}{\rho} \vec{\omega} \cdot \text{grad } \Psi = \frac{1}{\rho} (\text{grad } \Lambda \wedge \text{grad } \Psi) \cdot \text{grad } S = -T, \quad (2.15')$$

$$\frac{D(\Lambda, \Psi, S)}{D(x_1, x_2, x_3)} = -\rho T. \quad (2.16')$$

Par conséquent, le système d'équations (I_H) peut être remplacé par le système d'équations équivalent :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \frac{D(\Lambda, \Psi, S)}{D(x_1, x_2, x_3)} = -\rho T, \\ (b) \quad & \text{grad } \Phi - \Lambda \text{ grad } S = \frac{1}{\rho} \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } S, \\ (c) \quad & h = h(p, S), \\ (d) \quad & h + \frac{1}{2} v^2 + Q = \text{const.}, \\ (e) \quad & \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{S=\text{const.}}, \\ (f) \quad & T = \left(\frac{\partial h}{\partial S} \right)_{p=\text{const.}}, \end{aligned} \right\} \quad (II_H)$$

donc par un système de huit équations scalaires pour huit fonctions inconnues : $\Phi, \Psi, S, \Lambda, \rho, h, T$ et p .

On peut donc formuler tous ces résultats de la façon suivante :

THÉOREME II. *Les écoulements permanents d'un fluide parfait, « donné », sont régis par :*

- le système d'équations (II_H) , s'ils sont isoénergétiques,
- le système d'équations (II_S) , s'ils sont isentropiques,
- le système d'équations (II_i) , s'ils sont isentropiques et si le fluide est incompressible.

On peut ajouter quelques remarques simples :

1° Les représentations vectorielles trouvées pour la vitesse $\vec{v}$ et pour le tourbillon $\vec{\omega}$ ont un caractère invariant par rapport au choix du système de coordonnées et elles permettent d'écrire facilement les composantes covariantes et contravariantes de ces vecteurs dans un système quelconque de coordonnées.

2° Les deux premières équations vectorielles de ces systèmes sont entièrement équivalentes aux relations de V. VALCOVICI. Mais, par le

passage au système de coordonnées cartésien orthogonal T_x , nous ne sommes plus obligés de connaître d'abord l'expression analytique des fonctions $H(x_1, x_2, x_3)$ ou $S(x_1, x_2, x_3)$ car, dans nos équations, toutes les fonctions inconnues jouent un rôle égal. De cette façon, une difficulté essentielle de la méthode de V. VALCOVICI a été écartée.

3° La signification des fonctions introduites est évidente; ainsi, l'équation de la famille des lignes de courant est :

$$\left. \begin{array}{l} \Psi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}, \\ H(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}, \end{array} \right\} \text{ ou } \left. \begin{array}{l} \Psi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}, \\ S(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}, \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

c'est-à-dire :

$$\left. \begin{array}{l} \psi(q_1, q_2, q_3) = \text{const.}, \\ q_3 = \text{const.}, \end{array} \right\} \quad (2.18')$$

écrite dans le système de coordonnées curvilignes T_q .

L'équation de la famille des lignes de tourbillon est :

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}, \\ H(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}, \end{array} \right\} \text{ ou } \left. \begin{array}{l} \Lambda(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}, \\ S(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}, \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

c'est-à-dire :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda(q_1, q_2, q_3) = \text{const.}, \\ q_3 = \text{const.}, \end{array} \right\} \quad (2.19')$$

dans le système de coordonnées curvilignes T_q .

En tenant compte de leur signification, nous dirons que :

$\Psi \equiv \Psi(x_1, x_2, x_3)$ est « la fonction de courant » et

$\Psi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$ est l'équation de la famille de surfaces de courant de l'écoulement considéré;

$\Phi \equiv \Phi(x_1, x_2, x_3)$ est « la fonction potentielle » et

$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$ est l'équation de la famille de surfaces « équipotentielles »¹⁶⁾ de l'écoulement considéré;

$\Lambda \equiv \Lambda(x_1, x_2, x_3)$ est « la fonction de tourbillon » et

$\Lambda(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$ est l'équation de la famille de surfaces de tourbillon de l'écoulement considéré.

On a donc obtenu comme résultat :

¹⁶⁾ Il faut préciser que ce nom est donné ici à cause de l'analogie mise en évidence dans le premier chapitre, mais la fonction Φ n'est pas « une vraie fonction potentielle » de l'écoulement.

THÉORÈME III. *Si l'on a un écoulement permanent et isentropique (ou isoénergétique) dans un domaine tridimensionnel ($\mathfrak{D}$) d'un fluide parfait et « donné », alors, en chaque point $M \in \mathfrak{D}$:*

1° *la ligne de courant, qui passe par ce point, se trouve à l'intersection des surfaces de courant et des surfaces isoénergétiques (ou isentropiques), qui passent aussi par le point M ;*

2° *la ligne de tourbillon, qui passe par ce point, se trouve à l'intersection des surfaces de tourbillon et des surfaces isoénergétiques (ou isentropiques), qui passent aussi par le point M .*

§ 3. Supposons qu'on veut étudier un écoulement à l'aide d'un des systèmes d'équations (II_s) , (II_i) ou (II_H) , en cherchant à déterminer les fonctions inconnues qui lui correspondent.

Si cet écoulement est de classe (C_s) ou (C_i) , $H(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction bien déterminée par sa signification physique et on ne peut pas agir de façon arbitraire sur ses valeurs ; on a la même situation pour l'entropie $S(x_1, x_2, x_3)$, lorsque l'écoulement envisagé est de classe (C_H) .

Le problème se pose d'une manière différente pour les autres fonctions inconnues, introduites précédemment : $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ et $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$; les expressions analytiques générales de ces fonctions ne sont déterminées entièrement ni par le système d'équations (II_s) , (II_i) ou (II_H) , auquel elles doivent satisfaire, ni par leurs significations physiques. On a vu, par exemple, que la fonction de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ est déterminée une fonction additive $(\tilde{\tau}_1(H)$ ou $\tilde{\tau}_1(S))$ près.

Mais, en général, la fonction de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ peut dépendre de l'énergie totale H (ou de l'entropie S), de manière implicite et non pas seulement par l'intermédiaire d'une fonction additive arbitraire ; plus précisément, Ψ peut dépendre de x_1, x_2, x_3 , tant directement, que par l'intermédiaire des fonctions $H(x_1, x_2, x_3)$ (ou $S(x_1, x_2, x_3)$), c'est-à-dire :

$$\Psi \equiv \tilde{\Psi}[H(x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3], \quad (2.20)$$

ou

$$\Psi \equiv \tilde{\Psi}[S(x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3]. \quad (2.20')$$

Cette dépendance implicite de Ψ par rapport à H ou à S peut rester non déterminée, à cause du type des opérations vectorielles qui font intervenir Ψ dans les expressions des grandeurs mécaniques du problème et dans les équations des systèmes établis ; c'est seulement la dépendance directe de Ψ par rapport à x_1, x_2 et x_3 , qui joue un rôle essentiel et qui doit être déterminée.

Ces idées seront mieux expliquées aux chapitres suivants, où on verra d'une façon plus précise quel rôle joue la dépendance de Ψ par rapport à H ou à S et pourquoi on ne peut l'éliminer dès le début.

Mais, en ce qui concerne le genre de dépendance mis en évidence précédemment, il faut préciser ici une question importante, qui sera utilisée fréquemment dans les développements ultérieurs.

Considérons deux fonctions $F(x_1, x_2, x_3)$ et $f(x_1, x_2, x_3)$ qui sont définies et de classe C^2 dans un domaine $(\mathfrak{D})$ donné. On sait que les deux fonctions sont « dépendantes » dans $(\mathfrak{D})$, si elles sont liées par une relation du type :

$$\varphi(F, f) = 0 \quad (2.21)$$

en chaque point $M \in \mathfrak{D}$; la propriété d'« indépendance » est définie par la négation de la précédente, en disant que les deux fonctions sont « indépendantes » lorsqu'une relation du type (2.21) ne peut pas exister. Une telle définition de l'indépendance n'est pas toujours entièrement satisfaisante, parce qu'elle couvre un « cas-limite » caractérisé par des propriétés spécifiques; puisque dans ce travail ce « cas-limite » joue un rôle particulier, il faut le mettre bien en évidence.

Dans ce but, introduisons un système de coordonnées curvilignes $T_q(q_1, q_2, q_3)$ de la même façon qu'au (Ch. I, § 3), c'est-à-dire en choisissant $q_3 = f(x_1, x_2, x_3)^{17)}$ et en prenant comme q_1 et q_2 deux paramètres indépendants sur les surfaces de la famille $q_2 \equiv f(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$, et tels que :

$$\text{grad } q_1 \cdot \text{grad } q_3 = 0 \quad \text{et} \quad \text{grad } q_2 \cdot \text{grad } q_3 = 0 \quad (2.22)$$

en chaque point du domaine considéré; un tel choix peut être toujours fait sans introduire pour cela une hypothèse supplémentaire. Dans le cas général, on a :

$$\begin{aligned} F &\equiv F(x_1, x_2, x_3) \equiv F[x_1(q_1, q_2, q_3), x_2(q_1, q_2, q_3), x_3(q_1, q_2, q_3)] \equiv \\ &\equiv \tilde{F}(q_1, q_2, q_3), \end{aligned}$$

par rapport au changement de variables introduit; deux « cas-limites » peuvent être ainsi mis en évidence. D'abord, lorsque les fonctions $F(x_1, x_2, x_3)$ et $f(x_1, x_2, x_3)$ sont liées par une relation du type (2.21), le changement de variables employé conduit à une fonction $\tilde{F}(q_3)$; donc, lorsque les deux fonctions sont « dépendantes », $\tilde{F}$ ne varie que le long des courbes orthogonales à la famille de surfaces $f(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$

L'autre « cas-limite » est celui pour lequel le changement de variables introduit conduit à une fonction $\tilde{F}$, qui ne dépend pas de q_3 ; donc cette fonction $\tilde{F}$ ne varie pas d'une surface de la famille $q_3 \equiv f(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$ à l'autre.

La condition nécessaire et suffisante, qui doit être remplie pour obtenir ce « cas-limite », est la suivante :

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial q_3} \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathfrak{D}), \quad (2.23)$$

¹⁷⁾ On peut prendre également $q_3 = F(x_1, x_2, x_3)$, car les deux fonctions considérées jouent le même rôle.

la dérivée partielle par rapport à q_3 étant calculée dans le système de coordonnées T_q adopté. En utilisant les mêmes notations et la même méthode de calcul qu'au (Ch. I, § 3), on déduit la valeur suivante de cette dérivée partielle :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial q_3} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_3} = \text{grad } F \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = \sqrt{g_{33}} \text{grad } F \cdot \vec{e}_3 = \\ &= \frac{1}{g^{33}} \text{grad } F \cdot \text{grad } q_3 = \frac{1}{|\text{grad } f|^2} \text{grad } F \cdot \text{grad } f.\end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante (2.23) revêt donc la forme suivante :

$$\text{grad } F \cdot \text{grad } f \equiv 0 \text{ dans } (\mathfrak{D}); \quad (2.23')$$

les calculs précédents montrent que cette propriété ne dépend pas des variables q_1 et q_2 choisies (qui sont définies par les conditions (2.22)); il s'agit donc d'une propriété métrique intrinsèque des fonctions $F(x_1, x_2, x_3)$ et $f(x_1, x_2, x_3)$.

Une fonction $F(x_1, x_2, x_3)$, définie et de classe C^2 dans un domaine $(\mathfrak{D})$, qui prend toutes ses valeurs le long de chaque surface d'une famille de surfaces donnée :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}^{18)},$$

sera dénommée, dans ce travail, « fonction strictement indépendante ¹⁹⁾ par rapport à la fonction $f(x_1, x_2, x_3)$ dans le domaine $(\mathfrak{D})$ ». On a donc le résultat suivant :

THÉORÈME IV. $F(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction « strictement indépendante » par rapport à une autre fonction $f(x_1, x_2, x_3)$ dans un domaine $(\mathfrak{D})$ — où les deux fonctions sont définies et de classe C^2 —, si les deux fonctions satisfont à la condition (2.23'), et seulement dans ce cas.

Lorsque la condition (2.23') est remplie, on déduit directement que $f(x_1, x_2, x_3)$ est aussi « une fonction strictement indépendante par rapport à la fonction $F(x_1, x_2, x_3)$ », dans le même domaine $(\mathfrak{D})$, par suite de la symétrie de cette condition. Donc, on peut dire encore que deux fonctions $F(x_1, x_2, x_3)$ et $f(x_1, x_2, x_3)$, satisfaisant à la condition (2.23'), sont deux fonctions « qui varient d'une manière strictement indépendante par rapport aux variables x_1, x_2, x_3 dans le domaine $(\mathfrak{D})$ ».

Nous avons vu que, en général, la fonction de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ n'est pas une fonction « strictement indépendante » par rapport à l'énergie totale $H(x_1, x_2, x_3)$ — ou par rapport à l'entropie $S(x_1, x_2, x_3)$ —.

¹⁸⁾ Nous supposons également que $f(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction définie et de classe C^2 dans le domaine $(\mathfrak{D})$.

¹⁹⁾ Nous avons préféré ce nom à cause de la signification de ce type d'« indépendance » dans les développements ultérieurs; pour qu'il ne conduise pas à des confusions, nous précisons chaque fois lorsqu'il s'agira de la notion définie et expliquée ici.

Les équations $(II_{s.b})$, $(II_{i.b})$ et respectivement $(II_{H.b})$ donnent :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } H - \Lambda |\text{grad } H|^2 = 0, \\ \text{(b) } \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } \Psi - \Lambda \text{grad } H \cdot \text{grad } \Psi = 0, \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

dans les cas (C_s) et (C_i) , et respectivement :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } S - \Lambda |\text{grad } S|^2 = 0, \\ \text{(b) } \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } \Psi - \Lambda \text{grad } S \cdot \text{grad } \Psi = 0, \end{array} \right\} \quad (2.24')$$

dans le cas (C_H) .

Par conséquent, la fonction « potentielle » $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ n'est pas une fonction « strictement indépendante » par rapport à l'énergie totale $H(x_1, x_2, x_3)$ (ou par rapport à l'entropie $S(x_1, x_2, x_3)$) dans les régions tourbillonnaires de l'écoulement ($\Lambda \neq 0$); on déduit aussi que, dans ces régions de l'écoulement, les fonctions Φ et Ψ « varient d'une manière strictement indépendante par rapport aux variables d'espace », lorsque les fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$ — ou $S(x_1, x_2, x_3)$ — satisfont à la même propriété, et seulement dans ce cas.

Enfin, nous pouvons préciser la même question pour la fonction de « tourbillon » $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$ en considérant la famille de lignes de courant donnée par ses équations paramétriques :

$$x_i = x_i(\alpha, \beta, \xi), \quad (i = 1, 2, 3);$$

α et β sont les deux paramètres qui caractérisent une ligne de courant et ξ est le paramètre qui définit la position d'un point sur chaque ligne de courant.

Bien entendu, il y a aussi la condition nécessaire :

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(\alpha, \beta, \xi)} \neq 0 \quad \text{partout dans } (\mathfrak{D})$$

et on peut considérer ce système de paramètres comme un système de coordonnées curvilignes :

$$q_1 = \alpha(x_1, x_2, x_3), \quad q_2 = \beta(x_1, x_2, x_3), \quad q_3 = \xi(x_1, x_2, x_3).$$

En général, on ne peut pas supposer que ce système de coordonnées curvilignes est un système triple orthogonal et, par suite, en vertu du Théorème IV, on ne peut pas affirmer, à priori, que chacun de ces paramètres est « strictement indépendant » par rapport aux autres.

Les différents cas possibles, pour lesquels deux des trois paramètres « varient d'une manière strictement indépendante » par rapport aux variables d'espace, seront envisagés en détail plus loin; nous mettrons aussi en évidence leur signification physique.

Les écoulements envisagés étant permanents, le temps t n'est plus une variable indépendante, mais une fonction des variables d'espace; on peut toujours prendre $t = \xi$, en précisant ainsi la position de chaque point (sur une ligne de courant donnée) par rapport à sa position à un moment « initial » $t = t_0$.

Le paramètre $t(x_1, x_2, x_3)$ n'est pas, en général, « strictement indépendant » par rapport aux paramètres α et β ; le cas particulier, pour lequel $t(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction « strictement indépendante » par rapport à chacun des paramètres α et β , sera envisagé à la fin de ce chapitre.

En vertu des développements précédents, la fonction de courant Ψ et l'énergie totale H (ou l'entropie S) ne dépendent que des paramètres α et β ; par suite, lorsque $t(x_1, x_2, x_3)$ n'est pas une fonction « strictement indépendante » par rapport à chacun des paramètres $\alpha(x_1, x_2, x_3)$ et $\beta(x_1, x_2, x_3)$, ni la fonction de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, ni l'énergie totale $H(x_1, x_2, x_3)$ (ou l'entropie $S(x_1, x_2, x_3)$), ne seront des fonctions « strictement indépendantes » par rapport à la fonction $t(x_1, x_2, x_3)$.

En ce qui concerne la fonction de « tourbillon » $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$, l'équation (2.15) donne pour les cas (C_S) et (C_I) :

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \vec{v} \cdot \text{grad } \Lambda = 1$$

et on obtient:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda(x_1, x_2, x_3) = \Lambda[x_1(t, \alpha_1, \beta_1), x_2(t, \alpha_1, \beta_1), x_3(t, \alpha_1, \beta_1)] = \\ &= \tilde{\Lambda}(t) = t + \Lambda_1(\alpha_1, \beta_1), \end{aligned}$$

en intégrant sur la ligne de courant (α_1, β_1) . La constante $\Lambda_1(\alpha_1, \beta_1)$ variant d'une ligne de courant à l'autre, la fonction $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$ a donc la forme suivante:

$$\Lambda = \Lambda(x_1, x_2, x_3) = t(x_1, x_2, x_3) + \Lambda_1(\Psi, H). \quad (2.25)$$

Dans le cas des écoulements de classe (C_H) , on obtient de la même façon l'expression suivante:

$$\Lambda = \Lambda(x_1, x_2, x_3) = - \int T dt + \Lambda_1(\Psi, S), \quad (2.25')$$

ou plus exactement:

$$d\Lambda = -Tdt + \text{grad } \Lambda_1 \cdot \vec{dr}. \quad (2.25'')$$

Par conséquent, la fonction de « tourbillon » $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$ n'est une fonction « strictement indépendante », en général, ni par rapport à la fonction de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, ni par rapport à l'énergie totale $H(x_1, x_2, x_3)$ (ou à l'entropie $S(x_1, x_2, x_3)$).

§ 4. Avant d'aller plus loin, nous devons préciser aussi la classe de fonctions où l'on cherchera « les solutions » des systèmes d'équations envisagés. Nous supposons que toutes les fonctions inconnues, qui interviennent dans ces systèmes, doivent satisfaire aux propriétés suivantes:

1° Elles sont des fonctions définies, uniformes et continues dans tout le domaine considéré (2).

2° Elles ont des dérivées partielles par rapport aux variables x_1, x_2, x_3 (au moins du premier et du second ordre) en chaque point $M \in \mathfrak{D}$.

3° Leurs dérivées partielles sont des fonctions uniformes et continues en tout point $M \in \mathfrak{D}$.

Par conséquent, on cherchera « les solutions » de ces systèmes d'équations dans l'espace fonctionnel C^2 .

Dans le cadre de ces hypothèses, la première équation de ces systèmes (c'est-à-dire $(II_{S,a})$, $(II_{H,a})$ ou $(II_{I,a})$) représente la condition nécessaire et suffisante à laquelle les fonctions $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$, $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$ (ou $S(x_1, x_2, x_3)$) doivent satisfaire pour pouvoir être choisies comme de nouvelles coordonnées curvilignes; on désigne par T_v le système de coordonnées curvilignes (p_1, p_2, p_3) défini par les relations :

$$p_1 = \Lambda(x_1, x_2, x_3), \quad p_2 = \Psi(x_1, x_2, x_3), \quad p_3 = H(x_1, x_2, x_3), \quad (2.26)$$

dans le cas des classes d'écoulements (C_S) et (C_I) ; nous désignerons également par T_p , dans le cas des écoulements de classe (C_H) , le système de coordonnées curvilignes (p_1, p_2, p_3) défini par les relations :

$$p_1 = \Lambda(x_1, x_2, x_3), \quad p_2 = \Psi(x_1, x_2, x_3), \quad p_3 = S(x_1, x_2, x_3). \quad (2.26')$$

Dans le cas de la classe d'écoulements (C_S) , les relations (2.12), (2.14) et (2.15) donnent :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \vec{v} \cdot \text{grad } \Lambda &= 1, \quad \vec{v} \cdot \text{grad } \Psi = 0, \quad \vec{v} \cdot \text{grad } H = 0, \\ (b) \quad \vec{\omega} \cdot \text{grad } \Lambda &= 0, \quad \vec{\omega} \cdot \text{grad } \Psi = \rho, \quad \vec{\omega} \cdot \text{grad } H = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

et, si l'on désigne par $\vec{\delta}$ le champ vectoriel défini par les relations :

$$\vec{\delta} \cdot \text{grad } \Lambda = 0, \quad \vec{\delta} \cdot \text{grad } \Psi = 0, \quad \vec{\delta} \cdot \text{grad } H = 1, \quad (2.28)$$

on obtient deux systèmes de vecteurs :

$$\left\{ \vec{v}, \frac{1}{\rho} \vec{\omega}, \vec{\delta} \right\} \text{ et } \{ \text{grad } \Lambda, \text{grad } \Psi, \text{grad } H \}, \quad (2.29)$$

qui sont réciproques en chaque point M du domaine considéré $(\mathfrak{D})$.

Pour les deux autres cas, les relations analogues aux relations (2.12), (2.14) et (2.15) donnent les formules similaires :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \vec{v} \cdot \text{grad } \Lambda &= 1, \quad \vec{v} \cdot \text{grad } \Psi = 0, \quad \vec{v} \cdot \text{grad } H = 0, \\ (b) \quad \vec{\omega} \cdot \text{grad } \Lambda &= 0, \quad \vec{\omega} \cdot \text{grad } \Psi = 1, \quad \vec{\omega} \cdot \text{grad } H = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.27')$$

$$\{ \vec{v}, \vec{\omega}, \vec{\delta} \} \text{ et } \{ \text{grad } \Lambda, \text{grad } \Psi, \text{grad } H \}, \quad (2.29')$$

pour la classe d'écoulements $(C_i)^{20}$ et :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \vec{v} \cdot \text{grad } \Lambda &= -T, \quad \vec{v} \cdot \text{grad } \Psi = 0, \quad \vec{v} \cdot \text{grad } S = 0, \\ (b) \quad \vec{\omega} \cdot \text{grad } \Lambda &= 0, \quad \vec{\omega} \cdot \text{grad } \Psi = -\rho T, \quad \vec{\omega} \cdot \text{grad } S = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.27'')$$

$$\vec{\delta} \cdot \text{grad } \Lambda = 0, \quad \vec{\delta} \cdot \text{grad } \Psi = 0, \quad \vec{\delta} \cdot \text{grad } S = -T, \quad (2.28'')$$

$$\left\{ -\frac{1}{T} \vec{v}, -\frac{1}{\rho T} \vec{\omega}, -\frac{1}{T} \vec{\delta} \right\} \text{ et } \{ \text{grad } \Lambda, \text{grad } \Psi, \text{grad } S \}, \quad (2.29'')$$

pour la classe d'écoulements (C_H) .

Ces remarques conduisent aux représentations suivantes des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{\omega}$ et $\vec{\delta}$ dans les systèmes de coordonnées curvilignes T_p introduits :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial p_1} = \sqrt{\tau_{11}} \vec{\varepsilon}_1, \quad \frac{1}{\rho} \vec{\omega} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial p_2} = \sqrt{\tau_{22}} \vec{\varepsilon}_2, \quad \vec{\delta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial p_3} = \\ &= \sqrt{\tau_{33}} \vec{\varepsilon}_3, \text{ dans le cas } (C_S), \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial p_1} = \sqrt{\tau_{11}} \vec{\varepsilon}_1, \quad \vec{\omega} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial p_2} = \sqrt{\tau_{22}} \vec{\varepsilon}_2, \quad \vec{\delta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial p_3} = \\ &= \sqrt{\tau_{33}} \vec{\varepsilon}_3, \text{ dans le cas } (C_i), \end{aligned} \quad (2.30')$$

$$-\frac{1}{T} \vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial p_1} = \sqrt{\tau_{11}} \vec{\varepsilon}_1, \quad -\frac{1}{\rho T} \vec{\omega} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial p_2} = \sqrt{\tau_{22}} \vec{\varepsilon}_2, \quad (2.30'')$$

$$-\frac{1}{T} \vec{\delta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial p_3} = \sqrt{\tau_{33}} \vec{\varepsilon}_3, \text{ dans le cas } (C_H).$$

Dans les dernières relations nous avons désigné par :

$\vec{\varepsilon}_i$ ($i = 1, 2, 3$), les trois vecteurs unitaires des tangentes aux courbes-coordonnées ($p_i = \text{variable}$);

τ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), les composantes covariantes du tenseur fondamental dans les systèmes de coordonnées T_p .

En désignant maintenant par v_i , Ω_i , δ_i , ($i = 1, 2, 3$) les trois composantes covariantes et par v^i , Ω^i , δ^i , ($i = 1, 2, 3$) les trois composantes contravariantes des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{\omega}$ et respectivement $\vec{\delta}$, dans le système de coordonnées curvilignes T_p choisi, leurs valeurs seront obtenues aisément par les relations (2.30), (2.30') ou (2.30'').

²⁰) Les relations (2.28) gardent la même forme dans ce cas.

La première équation de chacun de ces systèmes — c'est-à-dire les équations (II_{S.a}), (II_{i.a}) et (II_{H.a}) — et la formule de transformation du déterminant fondamental par un changement de variables donnent :

$$\tau = \det |\tau_{ij}| = \bar{g} \left[\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(p_1, p_2, p_3)} \right]^2 = \frac{1}{\rho^2}, \text{ dans le cas (C}_S\text{)}, \quad (2.34)$$

$$\tau = \det |\tau_{ij}| = \bar{g} \left[\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(p_1, p_2, p_3)} \right]^2 = 1, \text{ dans le cas (C}_i\text{)}, \quad (2.34')$$

$$\tau = \det |\tau_{ij}| = \bar{g} \left[\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(p_1, p_2, p_3)} \right]^2 = \frac{1}{\rho^2 T^2}, \text{ dans le cas (C}_H\text{)}, \quad (2.34'')$$

où $\bar{g} = 1$ est la valeur du déterminant fondamental dans le système de coordonnées cartésien orthogonal T_x .

Les relations de liaisons, qui existent entre les deux systèmes réciproques de vecteurs (2.29), s'écrivent :

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho} \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H, \vec{\omega} = \text{grad } H \wedge \text{grad } \Lambda, \vec{\delta} = \frac{1}{\rho} \text{grad } \Lambda \wedge \text{grad } \Psi, \quad (2.35)$$

$$\text{grad } \Lambda = \vec{\omega} \wedge \vec{\delta}, \text{grad } \Psi = \rho \vec{\delta} \wedge \vec{v}, \text{grad } H = \vec{v} \wedge \vec{\omega}. \quad (2.36)$$

Les relations analogues, pour les deux systèmes réciproques (2.29'), s'écrivent :

$$\vec{v} = \text{grad } \Psi' \wedge \text{grad } H, \vec{\omega} = \text{grad } H \wedge \text{grad } \Lambda, \vec{\delta} = \text{grad } \Lambda \wedge \text{grad } \Psi', \quad (2.35')$$

$$\text{grad } \Lambda = \vec{\omega} \wedge \vec{\delta}, \text{grad } \Psi' = \vec{\delta} \wedge \vec{v}, \text{grad } H = \vec{v} \wedge \vec{\omega}. \quad (2.36')$$

Enfin, les deux systèmes réciproques de vecteurs (2.29'') donnent les relations :

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho} \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } S, \vec{\omega} = \text{grad } S \wedge \text{grad } \Lambda, \vec{\delta} = \frac{1}{\rho} \text{grad } \Lambda \wedge \text{grad } \Psi, \quad (2.35'')$$

$$\text{grad } \Lambda = -\frac{1}{T} \vec{\omega} \wedge \vec{\delta}, \text{grad } \Psi' = -\frac{\rho}{T} \vec{\delta} \wedge \vec{v}, \text{grad } S = -\frac{1}{T} \vec{v} \wedge \vec{\omega}. \quad (2.36'')$$

Si l'on pose :

$$\tilde{\varphi} \equiv \tilde{\varphi}(p_1, p_2, p_3) \equiv \Phi[x_1(p_1, p_2, p_3), x_2(p_1, p_2, p_3), x_3(p_1, p_2, p_3)] \quad (2.37)$$

alors, pour les écoulements isentropiques d'un fluide compressible, — cas (C_s) —, ou incompressible — cas (C_i) —, les relations (2.5) et (2.31, a') — ou (2.31', a') — donnent :

$$\tau_{11} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial p_1}, \quad \tau_{12} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial p_2}, \quad \tau_{13} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial p_3} - p_1, \quad (2.38)$$

dont on tire les conditions :

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial p_2} = \frac{\partial \tau_{12}}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial \tau_{12}}{\partial p_3} = \frac{\partial \tau_{13}}{\partial p_2}, \quad \frac{\partial \tau_{11}}{\partial p_3} = \frac{\partial \tau_{13}}{\partial p_1} + 1, \quad (2.39)$$

pour les composantes covariantes τ_{1j} ($j = 1, 2, 3$) du tenseur fondamental. De la même façon, les relations (2.5) et (2.31'', a') donnent :

$$\tau_{11} = \frac{-1}{T} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial p_1}, \quad \tau_{12} = \frac{-1}{T} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial p_2}, \quad \tau_{13} = \frac{-1}{T} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial p_3} - p_1 \right), \quad (2.38')$$

pour les écoulements isoénergétiques (C_H) ; on obtient les conditions analogues :

$$\frac{\partial (T\tau_{11})}{\partial p_2} = \frac{\partial (T\tau_{12})}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial (T\tau_{12})}{\partial p_3} = \frac{\partial (T\tau_{13})}{\partial p_2}, \quad \frac{\partial (T\tau_{11})}{\partial p_3} = \frac{\partial (T\tau_{13})}{\partial p_1} + 1. \quad (2.39')$$

L'introduction du système de coordonnées curvilignes T_p et les résultats obtenus dans ce paragraphe mettent mieux en évidence la relation qui existe entre les éléments mécaniques (dynamiques et thermodynamiques) de l'écoulement, « la géométrie » de l'écoulement et les fonctions introduites Φ , Ψ et Λ .

Les relations (2.28) et (2.28'') ont introduit d'une façon naturelle le champ vectoriel $\vec{\delta}$; celui-ci est caractérisé par le fait qu'en chaque point $M \in \mathcal{D}$ il est tangent à la courbe d'intersection des surfaces de courant, et de tourbillon, qui passent par ce point.

La forme symétrique des relations établies dans ce paragraphe — relations dans lesquelles les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{\omega}$ et $\vec{\delta}$ jouent un rôle relativement semblable ²¹⁾ — montre que le vecteur $\vec{\delta}$ doit avoir une certaine signification cinématique, dynamique, ou peut-être thermodynamique, qui ne peut pas être déterminée immédiatement.

Ces observations et ces résultats nous ont également conduit à désigner T_p — défini par les relations (2.26) ou (2.26') — comme « premier système naturel » de coordonnées curvilignes « attaché » à l'écoulement considéré. Ce système particulier de coordonnées curvilignes est défini par les conditions (2.34) et (2.39) dans le cas des écoulements de classe (C_s) et par les conditions analogues dans les deux autres cas envisagés. Dans chaque cas, ces conditions épuisent toutes les équations du problème. En effet, les conditions (2.34), (2.34') et (2.34'') sont res-

²¹⁾ Cette symétrie est parfaite pour la classe d'écoulements (C_i) .

pectivement équivalentes aux équations $(II_{S.a})$, $(II_{I.a})$ et $(II_{H.a})$ et les conditions (2.39), (2.39') sont équivalentes aux équations $(II_{S.b})$ et respectivement $(II_{H.b})$. On peut donc énoncer le résultat suivant :

THÉOREME V. *Un système de trois fonctions $p_i(x_1, x_2, x_3)$, ($i=1, 2, 3$), définies et de classe C^2 dans un domaine tridimensionnel $(\mathfrak{D})$, peut former « le premier système naturel » de coordonnées curvilignes « attaché » à un écoulement dans ce domaine, si les composantes covariantes τ_{ij} du tenseur fondamental satisfont aux conditions :*

- 1° (2.34) et (2.39), quand l'écoulement appartient à la classe (C_S) ,
- 2° (2.34') et (2.39), quand l'écoulement appartient à la classe (C_I) ,
- 3° (2.34'') et (2.39'), quand l'écoulement appartient à la classe (C_H) , et seulement dans ces cas ²²⁾.

Par conséquent, le problème de la détermination d'un écoulement de classe (C_S) , (C_I) ou (C_H) peut prendre la forme suivante :

THÉOREME VI. *La détermination d'un écoulement de classe (C_S) , (C_I) ou (C_H) est équivalente à la détermination du « premier système naturel » de coordonnées curvilignes « attaché » à cet écoulement.*

§ 5. Par la multiplication scalaire, membre à membre, des vecteurs donnés par les relations (2.5) et (2.12), on obtient :

$$\rho V^2 = \text{grad } \Phi.(\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) = \frac{D(\Phi, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)}, \quad (2.40)$$

dans le cas (C_S) ; on déduit les relations analogues :

$$V^2 = \text{grad } \Phi.(\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) = \frac{D(\Phi, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)}, \quad (2.40')$$

pour le cas (C_I) et :

$$\rho V^2 = \text{grad } \Phi.(\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } S) = \frac{D(\Phi, \Psi, S)}{D(x_1, x_2, x_3)}, \quad (2.40'')$$

pour le cas (C_H) .

Si $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}$ est un sous-domaine du domaine initial, dans lequel on a $V \neq 0$ en tous ses points, on peut alors introduire dans $(\mathfrak{D}_1)$ un nouveau système de coordonnées curvilignes T_i , défini par les formules :

$$l_1 = \Phi(x_1, x_2, x_3), \quad l_2 = \Psi(x_1, x_2, x_3), \quad l_3 = H(x_1, x_2, x_3), \quad (2.41)$$

dans les cas (C_S) et (C_I) et par les formules :

$$l_1 = \Phi(x_1, x_2, x_3), \quad l_2 = \Psi(x_1, x_2, x_3), \quad l_3 = S(x_1, x_2, x_3), \quad (2.41')$$

dans le cas (C_H) . Pour ces systèmes de coordonnées nous allons utiliser les notations suivantes :

$\vec{\sigma}_i$ et $\vec{\sigma}^i$ ($i=1, 2, 3$) sont les trois vecteurs unitaires des tangentes aux courbes-coordonnées ($l_i = \text{variable}$) et respectivement les trois vec-

²²⁾ Lorsqu'on veut construire des exemples d'écoulements de classe (C_S) ou (C_H) en partant du « premier système naturel » de coordonnées curvilignes, il est nécessaire de satisfaire seulement aux conditions (2.39) et respectivement (2.39'); les conditions (2.34) et respectivement (2.34'') définissent dans ce cas la masse spécifique ρ . On peut obtenir ainsi plusieurs solutions « possibles ».

teurs unitaires des normales aux surfaces de coordonnées ($l_i = \text{const.}$).

ξ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) sont les composantes covariantes du tenseur fondamental dans le système T_i choisi, et

ξ^{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) les composantes contravariantes du tenseur fondamental dans le même système T_i .

$\tilde{u}_i$ et $\tilde{\omega}_i$ ($i = 1, 2, 3$) sont les composantes covariantes des vecteurs $\vec{v}$ et respectivement $\vec{\omega}$;

$\tilde{u}^i$ et $\tilde{\omega}^i$ ($i = 1, 2, 3$) sont les composantes contravariantes des vecteurs $\vec{v}$ et respectivement $\vec{\omega}$.

Les équations (II_{S.a}), (II_{i.a}), (II_{H.a}) donnent pour le déterminant fondamental $\xi = \det |\xi_{ij}|$ la valeur :

$$\xi = \bar{g} \left[\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(l_1, l_2, l_3)} \right]^2 = \frac{1}{\rho^2 V^2}, \quad (2.42)$$

dans les cas (C_S) et (C_H) et la valeur :

$$\xi = \bar{g} \left[\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(l_1, l_2, l_3)} \right]^2 = \frac{1}{V^2}, \quad (2.42')$$

dans le cas (C_i).

Dans le système de coordonnées T_i les équations (II_{S.b}) et (II_{H.b}) s'écrivent sous la même forme :

$$\vec{v} = \text{grad } l_1 - \tilde{\lambda} \text{ grad } l_3 = \frac{1}{\rho} \text{grad } l_2 \wedge \text{grad } l_3, \quad (2.43)$$

où l'on a noté :

$$\tilde{\lambda} \equiv \tilde{\lambda}(l_1, l_2, l_3) \equiv \Lambda[x_1(l_1, l_2, l_3), x_2(l_1, l_2, l_3), x_3(l_1, l_2, l_3)],$$

mais nous rappellerons que les coordonnées l_i ($i = 1, 2, 3$) ne sont pas les mêmes dans les deux cas ; dans le système de coordonnées T_i défini par les relations (2.41), l'équation (II_{i.b}) s'écrit :

$$\vec{v} = \text{grad } l_1 - \tilde{\lambda} \text{ grad } l_3 = \text{grad } l_2 \wedge \text{grad } l_3. \quad (2.43')$$

Pour les composantes covariantes de la vitesse $\vec{v}$, on obtient donc les expressions suivantes :

$$\tilde{u}_1 = 1 = \frac{1}{\rho \sqrt{\xi}} \xi_{11}, \quad \tilde{u}_2 = 0 = \frac{1}{\rho \sqrt{\xi}} \xi_{12}, \quad \tilde{u}_3 = -\tilde{\lambda} = \frac{1}{\rho \sqrt{\xi}} \xi_{13}, \quad (2.44)$$

dans les cas (C_S) et (C_H) et :

$$\tilde{u}_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \xi_{11}, \quad \tilde{u}_2 = 0 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \xi_{12}, \quad \tilde{u}_3 = -\tilde{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \xi_{13}, \quad (2.44')$$

dans le cas (C_i) . Ces relations donnent :

$$\xi_{11} = \rho V \bar{\xi} = \frac{1}{V^2}, \quad \xi_{12} = 0, \quad \xi_{13} = \frac{-\tilde{\lambda}}{V^2}, \quad (2.45)$$

ou :

$$\xi_{11} = V \bar{\xi} = \frac{1}{V^2}, \quad \xi_{12} = 0, \quad \xi_{13} = \frac{-\tilde{\lambda}}{V^2}. \quad (2.45')$$

Les relations (2.43) et (2.43') donnent :

$$\vec{v} \cdot \text{grad } l_1 = V^2, \quad \vec{v} \cdot \text{grad } l_2 = 0, \quad \vec{v} \cdot \text{grad } l_3 = 0. \quad (2.46)$$

On a donc :

$$\vec{v} = V^2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial l_1} = V \vec{\sigma}_1, \quad (2.47)$$

d'où l'on obtient directement les valeurs des composantes contravariantes de la vitesse $\vec{v}$:

$$\tilde{u}^1 = V^2, \quad \tilde{u}^2 = 0, \quad \tilde{u}^3 = 0. \quad (2.48)$$

On observe facilement que les relations (2.46), (2.47) et (2.48) ont la même forme dans les trois cas étudiés.

On peut vérifier aussi que les relations de liaison, qui existent entre les composantes covariantes et les composantes contravariantes de la vitesse, ne fournissent pas des conditions supplémentaires, indépendantes par rapport aux relations (2.45) ou (2.45').

Des calculs simples donnent les équations suivantes :

$$\tilde{\lambda} = \frac{\xi^{11} - V^2}{\xi^{13}} = \frac{\xi^{12}}{\xi^{23}} = \frac{\xi^{13}}{\xi^{33}}, \quad (2.49)$$

valables pour les trois cas envisagés.

La condition $\tilde{\lambda} \neq 0$ en $(\mathfrak{D}_1)^{23}$ entraîne $\xi^{13} \neq 0$ et $\xi_{13} \neq 0$ en $(\mathfrak{D}_1)$. Par suite, les conditions :

$$\text{grad } \Phi \cdot \text{grad } H = 0 \text{ et } \frac{\partial \vec{r}}{\partial l_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial l_3} = 0, \quad (2.50)$$

ne sont vérifiées que dans les points du domaine $(\mathfrak{D}_1)$ où l'écoulement est irrotationnel. Mais on peut prendre $\xi^{23} = 0$, c'est-à-dire :

$$\text{grad } \Psi \cdot \text{grad } H = 0, \quad \text{grad } \Psi \cdot \text{grad } S = 0, \text{ en } (\mathfrak{D}_1). \quad (2.51)$$

²³⁾ La condition $\tilde{\lambda} = 0$ impliquerait $\vec{\omega} = 0$.

Dans ce cas les conditions (2.49) impliquent : $\xi_{23} = 0$ et $\xi^{12} = 0$, c'est-à-dire :

$$\text{grad } \Phi \cdot \text{grad } \Psi = 0 \text{ et } \frac{\partial \vec{r}}{\partial l_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial l_2} = 0, \text{ en } (\mathfrak{D}_1). \quad (2.52)$$

Enfin, si l'on élimine $\tilde{\lambda}$ entre les relations (2.45) et (2.49), on obtient les équations auxquelles doivent satisfaire les composantes covariantes ξ_{ij} du tenseur fondamental :

$$\xi_{11} = \rho \sqrt{\xi} = \frac{1}{V^2}, \quad \xi_{12} = 0, \quad \xi_{13} = \frac{V^2 - \xi^{11}}{V^2 \xi^{13}} = \frac{1 - \xi^{11} \xi_{11}}{\xi^{13}}, \quad (2.53)$$

dans les cas (C_S) et (C_H) , et les équations similaires :

$$\xi_{11} = \sqrt{\xi} = \frac{1}{V^2}, \quad \xi_{12} = 0, \quad \xi_{13} = \frac{V^2 - \xi^{11}}{V^2 \xi^{13}} = \frac{1 - \xi^{11} \xi_{11}}{\xi^{13}}, \quad (2.53')$$

dans le cas (C_i) .

Nous désignerons le système de coordonnées curvilignes T_i , défini par les relations (2.41) ou (2.41'), comme « le second système naturel » de coordonnées curvilignes « attaché » à un écoulement.

Les résultats obtenus plus haut peuvent être formulés d'une façon analogue aux résultats obtenus au paragraphe précédent :

THÉOREME VII. *Un système de trois fonctions $l_i(x_1, x_2, x_3)$, ($i = 1, 2, 3$), définies et de classe C^2 dans un domaine tridimensionnel $(\mathfrak{D}_1)^{24}$, peut former « le second système naturel » de coordonnées curvilignes « attaché » à un écoulement dans ce domaine, si les composantes covariantes ξ_{ij}^{25} du tenseur fondamental satisfont aux conditions (2.53), quand l'écoulement considéré est de classe (C_S) ou (C_H) , et aux conditions (2.53'), quand cet écoulement est de classe (C_i) ; ces conditions sont nécessaires et suffisantes.*

THÉOREME VIII. *La détermination d'un écoulement de classe (C_S) , (C_i) ou (C_H) est équivalente à la détermination du « second système naturel » de coordonnées curvilignes « attaché » à cet écoulement.*

Les résultats établis aux deux derniers paragraphes ont un caractère qualitatif et ils ne peuvent pas conduire à une méthode pratique pour la résolution effective d'un problème de mécanique.

§ 6. Les relations (2.25) et (2.25'') permettent de remplacer dans les développements précédents la fonction de « tourbillon » $\lambda(x_1, x_2, x_3)$ par

²⁴ Le domaine $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}$ est défini par la condition : $V \neq 0$ en tous ses points.

²⁵ Les composantes contravariantes, qui interviennent dans (2.53) ou (2.53'), peuvent être exprimées en fonction des composantes covariantes : la fonction V^2 peut être également exprimée en fonction des composantes covariantes ξ_{ij} en utilisant les relations (2.48).

la fonctions « temps » $t(x_1, x_2, x_3)$; en effet, ces relations et la première équation scalaire de chacun des systèmes (II_s) , (II_i) et respectivement (II_H) conduisent aux relations :

$$\frac{D(t, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \rho, \text{ — classe d'écoulements } (C_s) \text{ —}, \quad (2.54)$$

$$\frac{D(t, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)} = 1, \text{ — classe d'écoulements } (C_i) \text{ —}, \quad (2.54')$$

et respectivement :

$$\frac{D(t, \Psi, S)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \rho, \text{ — classe d'écoulements } (C_H) \text{ —}. \quad (2.54'')$$

On peut donc choisir les fonctions $t(x_1, x_2, x_3)$, $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$ (ou $S(x_1, x_2, x_3)$) comme nouvelles coordonnées curvilignes, de la même façon qu'aux deux paragraphes précédents.

Désignons par $T_{\bar{p}}$ le système de coordonnées curvilignes défini par les relations :

$$\bar{p}_1 = t(x_1, x_2, x_3), \bar{p}_2 = \Psi(x_1, x_2, x_3), \bar{p}_3 = H(x_1, x_2, x_3), \quad (2.55)$$

dans les cas (C_s) et (C_i) et, respectivement, par les relations :

$$\bar{p}_1 = t(x_1, x_2, x_3), \bar{p}_2 = \Psi(x_1, x_2, x_3), \bar{p}_3 = S(x_1, x_2, x_3), \quad (2.55')$$

dans le cas (C_H) ; on dira que $T_{\bar{p}}$ est le « troisième système naturel » de coordonnées curvilignes « attaché » à la classe d'écoulements envisagée. Dans ce système de coordonnées curvilignes, les deux systèmes de vecteurs réciproques sont :

$$\left\{ \vec{v}, \frac{1}{\rho} \vec{\omega}^*, \vec{\delta}^* \right\} \text{ et } \{ \text{grad } t, \text{grad } \Psi, \text{grad } H \} \text{ — dans le cas } (C_s) \text{ —}, \quad (2.56)$$

$$\left\{ \vec{v}, \vec{\omega}^*, \vec{\delta}^* \right\} \text{ et } \{ \text{grad } t, \text{grad } \Psi, \text{grad } H \} \text{ — dans le cas } (C_i) \text{ —}, \quad (2.56')$$

$$\left\{ \vec{v}, \frac{-1}{\rho T} \vec{\omega}^*, \vec{\delta}^* \right\} \text{ et } \{ \text{grad } t, \text{grad } \Psi, \text{grad } S \} \text{ — dans le cas } (C_H) \text{ —}. \quad (2.56'')$$

Nous avons adopté ici les notations suivantes :

$$\vec{\omega}^* = \vec{\omega} + \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \Psi} \rho \vec{v}, \quad \vec{\delta}^* = \vec{\delta} + \frac{\partial \Lambda_1}{\partial H} \rho \vec{v}, \text{ — dans le cas } (C_s) \text{ —}, \quad (2.57)$$

$$\vec{\omega}^* = \vec{\omega} + \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \Psi} \vec{v}, \quad \vec{\delta}^* = \vec{\delta} + \frac{\partial \Lambda_1}{\partial H} \vec{v}, \text{ — dans le cas } (C_i) \text{ —}, \quad (2.57')$$

$$\vec{\omega}^* = \vec{\omega} + \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \Psi} \rho \vec{v}, \quad -T \vec{\delta}^* = \vec{\delta} + \frac{\partial \Lambda_1}{\partial S} \vec{v}, \text{ — dans le cas } (C_H) \text{ —}, \quad (2.57'')$$

qui sont définies par rapport aux grandeurs analogues du « premier système naturel » de coordonnées curvilignes T_p (voir en détail le § 4 de ce chapitre). Toutes les relations, établies pour « le premier système naturel » de coordonnées curvilignes T_p , peuvent être retrouvées dans le cas du système T_p défini précédemment (en faisant attention à quelques petites modifications de forme); on obtient ainsi des résultats analogues aux Théorèmes V et VI. On retiendra, en particulier, les relations analogues à (2.38):

$$\bar{\tau}_{11} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{p}_1}, \quad \bar{\tau}_{12} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{p}_2}, \quad \bar{\tau}_{13} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{p}_3} - \bar{p}_1 - \Lambda_1(\bar{p}_2, \bar{p}_3), \quad (2.58)$$

en désignant ici par $\bar{\tau}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) les composantes covariantes du tenseur fondamental dans le système de coordonnées curvilignes T_p , et par $\bar{\varphi}$ l'expression de la fonction Φ par rapport au changement de variables (2.55), c'est-à-dire que

$$\bar{\varphi} \equiv \bar{\varphi}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3) \equiv \Phi[x_1(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3), x_2(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3), x_3(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)]. \quad (2.59)$$

L'intérêt principal du « troisième système naturel » de coordonnées curvilignes T_p est surtout représenté par l'un de ses cas particuliers; on n'envisagera ce cas particulier que pour les écoulements des classes (C_s) et (C_i).

Supposons que la fonction de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et l'énergie totale $H(x_1, x_2, x_3)$ sont chacune une fonction « strictement indépendante » par rapport à la fonction « temps » $t(x_1, x_2, x_3)$, dans le sens précisé précédemment (voir le § 3 de ce chapitre); en vertu du Théorème IV, il s'ensuit que :

$$\text{grad } \Psi \cdot \text{grad } t = 0, \quad \text{grad } H \cdot \text{grad } t = 0, \quad (2.60)$$

en chaque point du domaine considéré ($\mathfrak{D}$).

Dans ce cas, on déduit aisément les valeurs suivantes :

$$\bar{\tau}^{12} = 0, \quad \bar{\tau}^{13} = 0, \quad \bar{\tau}_{12} = 0, \quad \bar{\tau}_{13} = 0, \quad (2.61)$$

pour ces composantes du tenseur fondamental; les relations (2.58) et (2.61) conduisent aux conditions suivantes :

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{p}_2} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{p}_3} = \bar{p}_1 + \Lambda_1(\bar{p}_2, \bar{p}_3), \quad (2.62)$$

qui donnent :

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{p}_2 \partial \bar{p}_3} = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \bar{p}_2} = 0,$$

d'où l'on déduit que la fonction arbitraire Λ_1 ne dépend, dans ce cas, que de $\bar{p}_3$. On obtient ainsi l'expression générale suivante de la fonction $\bar{\varphi}$:

$$\bar{\varphi} = \bar{p}_1 \bar{p}_3 + \Lambda_1^*(\bar{p}_3) + \Lambda_2(\bar{p}_1), \quad \left(\frac{d\Lambda_1^*}{d\bar{p}_3} = \Lambda_1(\bar{p}_3) \right), \quad (2.63)$$

Λ_2 étant une fonction arbitraire de $\bar{p}_1$. L'expression analytique générale de la fonction « potentielle » est donc :

$$\Phi = Ht + \Phi_1(t) + \Phi_2(H), \quad (2.63')$$

par rapport aux variables cartésiennes orthogonales (x_i) ; Φ_1 et Φ_2 sont des fonctions arbitraires correspondant respectivement à Λ_2 et Λ_1 . Il en résulte les relations suivantes :

$$\text{grad } \Phi = \left(H + \frac{d\Phi_1}{dt} \right) \text{grad } t + \left(t + \frac{d\Phi_2}{dH} \right) \text{grad } H, \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \text{grad } \Phi - \Lambda \text{ grad } H = \text{grad } \Phi - \left(t + \frac{d\Phi_2}{dH} \right) \text{grad } H = \\ &= \left(H + \frac{d\Phi_1}{dt} \right) \text{grad } t, \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\vec{\omega} = \text{grad } H \wedge \text{grad } \Lambda = \text{grad } H \wedge \text{grad } t; \quad (2.66)$$

on a trouvé ainsi des écoulements pour lesquels la vitesse $\vec{v}$ et le tourbillon $\vec{\omega}$ sont orthogonaux :

$$\vec{v} \cdot \vec{\omega} = 0 \quad (2.67)$$

en chaque point du domaine ($\mathfrak{D}$).

On sait que tout vecteur $\vec{v}$, orthogonal partout à son rotationnel, peut être représenté sous la forme :

$$\vec{v} = \sigma \text{ grad } \tau, \quad (2.68)$$

à l'aide de deux fonctions : $\sigma(x_1, x_2, x_3)$ et $\tau(x_1, x_2, x_3)$; lorsque la vitesse $\vec{v}$ d'un écoulement de classe (C_s) ou (C_i) satisfait à la condition (2.67), on a les conditions suivantes :

$$\text{grad } \tau \cdot \text{grad } \Psi = 0, \quad \text{grad } \tau \cdot \text{grad } H = 0, \quad (2.69)$$

en vertu des relations (2.8) et (2.12). Par suite, la fonction $\tau(x_1, x_2, x_3)$ peut être choisie comme paramètre ξ , fixant la position d'un point sur chaque ligne de courant; ce paramètre est donc une fonction « strictement indépendante », tant par rapport à la fonction de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ qu'à l'énergie totale $H(x_1, x_2, x_3)$ — en vertu du Théorème IV — ; le cas défini par les conditions (2.60) correspond donc à l'hypothèse que la fonction « temps » ne dépend de x_1, x_2 et x_3 que par l'intermédiaire de ce paramètre.

Dans ce cas, les systèmes d'équations (II_s) et (II_i) prennent les formes suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \frac{D(t, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \rho, \\ (b) \quad & \left(H + \frac{d\Phi_1}{dt} \right) \text{grad } t = \frac{1}{\rho} \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H, \\ (c) \quad & p = p(\rho), \\ (d) \quad & \int \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} d\rho + \frac{1}{2} V^2 + Q = H, \end{aligned} \right\} \quad (II'_s)$$

et respectivement :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \frac{D(t, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)} = 1, \\ (b) \quad & \left(H + \frac{d\Phi_1}{dt} \right) \text{grad } t = \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H, \\ (c) \quad & p + \frac{1}{2} V^2 + Q = H; \end{aligned} \right\} \quad (II'_i)$$

dans chaque cas le nombre de fonctions inconnues est resté le même que dans les systèmes initiaux, les fonctions Φ_1 et t remplaçant les fonctions Φ et respectivement Λ .

On s'aperçoit que les deux premières équations des systèmes (II'_s) et (II'_i) conduisent aux relations :

$$\vec{v} \cdot \text{grad } t = \left(H + \frac{d\Phi_1}{dt} \right) |\text{grad } t|^2 = 1, \quad (2.70)$$

qui ont la même forme dans les deux cas considérés ; on déduit encore les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & V^2 = H + \frac{d\Phi_1}{dt}, \\ (b) \quad & |\text{grad } t| = \frac{1}{V}, \\ (c) \quad & |\vec{\omega}| = |\text{grad } H| \cdot |\text{grad } t| = \frac{1}{V} |\text{grad } H|, \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

qui ont aussi la même forme dans les deux cas envisagés.

Les résultats obtenus dans ce paragraphe peuvent être énoncés de la manière suivante :

THÉORÈME IX. *Les écoulements de classes (C_s) et (C_i) , qui ont la vitesse et le tourbillon orthogonaux en chaque point de leur domaine d'exis-*

tence, sont caractérisés par le fait qu'on peut toujours trouver un paramètre $\xi(x_1, x_2, x_3)$ déterminant la position d'une particule fluide sur chaque ligne de courant donnée et qui est une fonction « strictement indépendante » tant par rapport à la fonction de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, que par rapport à l'énergie totale $H(x_1, x_2, x_3)$.

Si la fonction « temps » $t(x_1, x_2, x_3)$ ne dépend de x_1, x_2, x_3 que par l'intermédiaire du paramètre ξ , elle a la même propriété que ξ , et les systèmes d'équations qui régissent ces classes d'écoulements prennent, dans ce cas, les formes (II_s^*) et respectivement (II_i') .

Naturellement, les systèmes d'équations (II_s^*) et (II_i') ne sont valables que dans les régions tourbillonnaires de ces écoulements; dans les régions non tourbillonnaires on a $H \equiv \text{const.}$ et les quatre premières équations scalaires de ces systèmes ne sont plus valables. Cette remarque est aussi valable pour les systèmes d'équations (II_s) , (II_i) et (II_H) et elle sera parfois sous-entendue, dans ce travail, en l'absence d'autres précisions.

DEUXIÈME PARTIE: FLUIDES INCOMPRESSIBLES

CHAPITRE III

L'introduction du système «réduit» et la réduction de ses équations à la forme normale

§ 1. On a déjà montré que la classe d'écoulements (C_i) est régie par le système suivant :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \frac{D(\Lambda, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)} = 1, \\ (b) \quad & \text{grad } \Phi - \Lambda \text{ grad } H = \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H, \\ (c) \quad & p + \frac{1}{2} V^2 + Q = H. \end{aligned} \right\} \quad (II_i)$$

On s'aperçoit qu'il suffit d'étudier le système (II'_i) constitué par les quatre premières équations scalaires de (II_i) ; ces quatre équations sont les seules équations aux dérivées partielles du système (II_i) et elles contiennent seulement quatre fonctions inconnues: $\Phi(x_1, x_2, x_3)$, $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, $H(x_1, x_2, x_3)$ et $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$. Si ces quatre fonctions inconnues sont déterminées ²⁶⁾ à l'aide du système d'équations (II'_i) , alors la dernière équation du système (II_i) donne directement l'expression analytique explicite de la cinquième fonction inconnue: la pression $p(x_1, x_2, x_3)$.

Les quatre équations scalaires et indépendantes du système (II'_i) expriment les quatre «conditions physiques» imposées par les lois de

²⁶⁾ Il s'agit ici du même degré de détermination que celui assuré aux trois composantes de la vitesse $\vec{v}$ et à l'énergie totale H seulement par les quatre premières équations scalaires du système (I_i) . Evidemment, pour déterminer entièrement une «solution» de (I_i) ou de (II_i) , il faut ajouter d'autres conditions et d'autres précisions, comme on a déjà indiqué en détail dans (Ch.I, § 1).

conservation de la masse et de la quantité de mouvement, car le système d'équations (II_i) est entièrement équivalent au système formé par l'équation de continuité et par l'équation de la quantité de mouvement (voir Ch. II, § 2).

Mais le système d'équations (II_i') ne constitue pas la plus simple et la plus efficace voie à suivre pour déterminer les fonctions inconnues introduites et pour résoudre ainsi le problème de mécanique envisagé; la forme analytique non symétrique de ses équations et la manière très différente, dans laquelle les fonctions inconnues interviennent dans ces équations, constituent les difficultés principales d'une étude mathématique du système (II_i'). On remplacera donc ce système d'équations aux dérivées partielles par un autre système équivalent, en cherchant à trouver des équations qui ont des formes analytiques plus symétriques et plus significatives et dans lesquelles on peut grouper convenablement les fonctions inconnues. En vue de déduire ce nouveau système d'équations, on prend le rotationnel des vecteurs qui se trouvent dans les deux membres de l'équation (II_i. b); on élimine ainsi la fonction $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ et on obtient l'équation vectorielle suivante :

$$\text{grad } H \wedge \text{grad } \Lambda = \text{rot } (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H). \quad (3.1)$$

Si l'on rapporte cette équation vectorielle au « premier système naturel » de coordonnées curvilignes T_p (voir Ch. II, §4), on en déduit le système d'équations scalaires :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \text{rot } (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) \cdot \text{grad } \Lambda = 0, \\ (b) \quad & \text{rot } (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) \cdot \text{grad } \Psi = \frac{D(\Lambda, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)}, \\ (c) \quad & \text{rot } (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) \cdot \text{grad } H = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Mais, on vérifie aisément que seulement deux équations du système (3.2) sont des équations indépendantes du point de vue du problème envisagé; prenons, par exemple, les équations (3.2, b) et (3.2, c). L'équation (3.2, c) et la propriété du vecteur : $\text{rot } (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H)$ d'avoir la divergence nulle assurent l'existence d'une fonction — disons $\tilde{\Lambda}(x_1, x_2, x_3)$ — telle que :

$$\text{rot } (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) = \text{grad } H \wedge \text{grad } \tilde{\Lambda}; \quad (3.1')$$

on obtient cette relation en suivant la méthode de calcul montrée en détail dans le cas du vecteur $\vec{v}$ (voir Ch. II, § 1).

Il en résulte que l'ensemble des fonctions Ψ , H et Λ doit satisfaire au même système d'équations que l'ensemble des fonc-

tions Ψ , H et $\tilde{\Lambda}$; plus précisément, les équations (3.1') et (3.2, b) montrent que :

$$\frac{D(\Lambda, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \frac{D(\tilde{\Lambda}, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)}.$$

Par suite, les « solutions » $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$ et $\tilde{\Lambda}(x_1, x_2, x_3)$, qui correspondent à la même paire de fonctions Ψ et H , sont liées par une relation du type :

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda + \Lambda_1(\Psi, H)$$

et on peut prendre toujours $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ en tenant compte de la forme analytique générale (2.25) de la fonction $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$.

En conclusion, l'équation vectorielle (3.1) est équivalente seulement à deux équations scalaires et indépendantes : soit (3.2, b) et (3.2, c), soit (3.2, a) et (3.2, b).

On simplifie davantage ce nouveau système en y remplaçant l'équation (3.2, b) par la suivante :

$$\text{rot}(\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) \cdot \text{grad } \Psi = 1,$$

qui est une conséquence directe des équations (3.2, b) et (II_i. a)

En remarquant qu'on a isolé ainsi les fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$, on peut envisager le nouveau système d'équations en plusieurs étapes successives; d'abord, on considère le système suivant :

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \text{rot}(\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) \cdot \text{grad } H = 0, \\ \text{(B)} \quad & \text{rot}(\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) \cdot \text{grad } \Psi = 1, \end{aligned} \quad (\S)$$

qui ne contient que deux équations scalaires pour les deux fonctions inconnues : $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$. On voit que ces équations ont une forme analytique plus symétrique et que les fonctions inconnues jouent ici un rôle égal; on peut considérer que le système d'équations (§) exprime les deux « conditions physiques » imposées par le système initial (II_i) aux fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$. Lorsqu'on a déterminé les fonctions Ψ et H à l'aide du système (§) — dans le sens précisé précédemment —, on ajoute l'équation (II_i. a) en vue de la détermination de la fonction $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$; on peut donc dire que cette équation exprime la « condition physique » imposée par le système initial (II_i) à la fonction $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$.

On a déjà vu que l'ensemble des équations (§) et (II_i. a) conduit nécessairement à l'équation vectorielle (3.1); cette équation vectorielle assure que les vecteurs :

$$\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H \text{ et } -\Lambda \text{grad } H$$

diffèrent par un gradient. L'existence d'une fonction $\Phi(x_1, x_2, x_3)$, qui vérifie une équation du type (II_i. b), est donc assurée; toutefois, il faut ajouter une équation scalaire, indépendante par rapport à l'ensemble

des équations (§) et (Π_i, a) , pour déterminer entièrement la fonction $\Phi(x_1, x_2, x_3)$. En effet, la fonction $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$ n'est entièrement déterminée ni par l'équation (Π_i, a) , ni par l'équation (3.1); donc, pour des valeurs fixées des fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$, à chaque « solution » $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$ de l'équation linéaire et homogène (Π_i, a) correspond une valeur de la fonction $\Phi(x_1, x_2, x_3)$. L'équation scalaire, qui doit déterminer la fonction $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ par rapport aux valeurs « trouvées » pour les fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, $H(x_1, x_2, x_3)$, $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$, peut être soit la forme différentielle de l'équation (Π_i, b) :

$$d\Phi = dH + (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) \cdot \vec{dr}, \quad (3.3)$$

soit l'une des équations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } \Lambda - \Lambda \text{ grad } H \cdot \text{grad } \Lambda &= \frac{D(\Lambda, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)}, \\ (b) \quad \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } \Psi - \Lambda \text{ grad } H \cdot \text{grad } \Psi &= 0, \\ (c) \quad \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } H - \Lambda |\text{grad } H|^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.3')$$

qui s'obtiennent en rapportant l'équation vectorielle (Π_i, b) au « premier système naturel » de coordonnées curvilignes T_x . Le choix sera fait en fonction de la nature du problème concret envisagé; on prendra, par exemple, l'équation scalaire (3.3) pour préciser les idées dans le cas général. L'équation scalaire choisie pour déterminer la fonction $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ exprimera la « condition physique » imposée à Φ par le système initial (Π_i) .

Le système constitué par les équations (§), (Π_i, a) et (3.3) est donc équivalent au système (Π_i) et il peut le remplacer; les parties composantes du nouveau système peuvent être étudiées successivement en suivant l'ordre indiqué auparavant.

Le système d'équation (§), qui est la première étape de cette étude, joue un rôle important, parce qu'il contient deux équations aux dérivées partielles du second ordre pour les fonctions inconnues $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$; le type et la nature de ces équations et la manière dans laquelle les fonctions Ψ et H interviennent dans les expressions des éléments mécaniques du problème expliquent ce rôle particulier.

Si le système d'équations (§) pouvait déterminer entièrement les fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$ pour un problème aux limites donné, alors le problème envisagé ici serait résolu, car les champs de la vitesse $\vec{v}$ et du tourbillon $\vec{\omega}$ seront complètement connus; l'indétermination de la fonction $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$, qui a été mise en évidence auparavant, serait écartée de cette façon.

En réalité, comme on verra en détail dans le chapitre suivant, le système d'équations (§) ne peut pas déterminer entièrement les fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$, d'autant plus qu'il est difficile de lui attacher un problème aux limites ayant une signification physique adéquate; ce système mettra en évidence le même type d'indétermination

que celui trouvé dans l'expression analytique générale (2.25) de la fonction $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$.

L'indétermination apparue ici s'explique par l'hypothèse du fluide parfait, qui a été introduite dès le début par les conditions (C_0) ; on sait que cette hypothèse ne permet pas de déterminer entièrement l'écoulement en utilisant seulement les équations des systèmes (I_i) ou (II_i) . Il manque une condition physique (donc une équation scalaire) pour déterminer ce problème et, en ce qui concerne les différents choix possibles de cette condition supplémentaire, les développements ultérieurs donneront quelques indications ayant un caractère des conditions nécessaires; l'hypothèse que l'écoulement soit irrotationnel est une condition de ce type.

§ 2. Le système d'équations aux dérivées partielles (§) sera nommé « le système réduit » attaché à la classe d'écoulements (C_i) et une paire de fonctions (Ψ, H) , qui vérifie le système (§), sera nommée « une solution formelle » de ce système.

Le fait que les fonctions Ψ et H jouent un rôle symétrique dans les équations du système « réduit » (§) permet d'ordonner ces équations soit suivant les dérivées partielles de la fonction Ψ , soit suivant les dérivées partielles de la fonction H .

En vue d'écrire les expressions analytiques explicites de ces équations, on utilisera les composantes ω_{x_i} ($i = 1, 2, 3$) du vecteur :

$$\vec{\omega} = \text{rot}(\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) \quad (3.4)$$

selon les axes du système cartésien de coordonnées T_x ; on a :

$$\omega_{x_i} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \Delta H - \frac{\partial H}{\partial x_i} \Delta \Psi + \text{grad } H \cdot \text{grad } \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \text{grad } \Psi \cdot \text{grad } \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (3.4')$$

l'indice i prenant successivement les valeurs 1, 2, 3.

Ainsi, la première équation du système « réduit » (§) peut s'écrire soit sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial x_3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} - \\ & - 2 \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} - 2 \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_3} - 2 \frac{\partial H}{\partial x_3} \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3 \partial x_1} + \\ & + \left[\frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_3} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial H}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_3^2} \right) \right] \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \quad (\Delta \Psi) \\ & + \left[\frac{\partial H}{\partial x_3} \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} \right) \right] \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \\ & + \left[\frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial H}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} \right) \right] \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = 0, \end{aligned}$$

en l'ordonnant suivant les dérivées partielles de la fonction Ψ , soit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \frac{\partial H}{\partial x_3} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \frac{\partial H}{\partial x_3} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_1} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x_3^2} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_3} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \frac{\partial H}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_3} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_3} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial x_1} - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial x_3} \right)^2 + \\
 & \quad + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_3} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_3} \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0
 \end{aligned} \quad (A_H)$$

en l'ordonnant suivant les dérivées partielles de la fonction H .

De même façon on obtient les deux formes similaires de la seconde équation du système « réduit » (§) :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_3} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial H}{\partial x_3} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} + \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} - \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial H}{\partial x_3} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_3} - \left(\frac{\partial H}{\partial x_3} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3 \partial x_1} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial^2 H}{\partial x_3^2} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)^2 + \\
 & \quad + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + 1 = 0
 \end{aligned} \quad (B_\Psi)$$

et

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} + \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} + \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 H}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_3} - \\
 & \quad - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial x_1} + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3 \partial x_1} - \right. \\
 & \quad - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} \right) \left] \frac{\partial H}{\partial x_1} + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \right. \\
 & \quad - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} \right) \left] \frac{\partial H}{\partial x_2} + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_3} - \right. \\
 & \quad - \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} \right) \left] \frac{\partial H}{\partial x_3} - 1 = 0.
 \end{aligned} \quad (B_H)$$

En remarquant la forme similaire de l'équation (3.2, a), on peut l'ordonner aussi soit suivant les dérivées partielles de la fonction Ψ , soit suivant les dérivées partielles de la fonction H , en obtenant ainsi les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial H}{\partial x_3} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial H}{\partial x_3} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \\
 & + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \\
 & - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_3} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial H}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_3} - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_3} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3 \partial x_1} + \\
 & + \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_3^2} \right) \right] \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \\
 & + \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} \right) \right] \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \\
 & + \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} \right) \right] \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = 0
 \end{aligned} \tag{D_\Psi}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \right. \\
 & + \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x_3^2} - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} + \right. \\
 & + \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_3} - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial x_1} + \\
 & + \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} \right) \right] \frac{\partial H}{\partial x_1} + \\
 & + \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} \right) \right] \frac{\partial H}{\partial x_2} + \\
 & + \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} \right) \right] \frac{\partial H}{\partial x_3} = 0.
 \end{aligned} \tag{D_H}$$

On attache ici l'équation (3.2, a) à côté du système « réduit » (§) à cause de leur appartenance commune au système (3.2); les résultats qui seront obtenus dans ce chapitre et leur interprétation physique justifieront davantage cette étude parallèle.

On s'aperçoit que les équations trouvées : (Δ_F) , (Δ_H) , (B_F) , (B_H) , (D_F) et (D_H) peuvent être encadrées dans les trois types généraux d'équations :

$$\alpha_{11} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \alpha_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \alpha_{33} \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} - 2\alpha_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\alpha_{23} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} - \quad (\alpha)$$

$$- 2\alpha_{31} \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} + l_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} + l = 0,$$

$$\beta_{11} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \beta_{22} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} + \beta_{33} \frac{\partial^2 G}{\partial x_3^2} - \beta_{12} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} - \beta_{23} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2 \partial x_3} -$$

$$- \beta_{31} \frac{\partial^2 G}{\partial x_3 \partial x_1} - m_1 \left(\frac{\partial G}{\partial x_1} \right)^2 - m_2 \left(\frac{\partial G}{\partial x_2} \right)^2 - m_3 \left(\frac{\partial G}{\partial x_3} \right)^2 + \quad (\beta)$$

$$+ 2m'_1 \frac{\partial G}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_3} + 2m'_2 \frac{\partial G}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_1} + 2m'_3 \frac{\partial G}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_2} + m = 0,$$

$$\sigma_{11} \frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} + \sigma_{22} \frac{\partial^2 D}{\partial x_2^2} + \sigma_{33} \frac{\partial^2 D}{\partial x_3^2} - \sigma_{12} \frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \partial x_2} - \sigma_{23} \frac{\partial^2 D}{\partial x_2 \partial x_3} - \quad (\sigma)$$

$$- \sigma_{31} \frac{\partial^2 D}{\partial x_3 \partial x_1} + n_1 \frac{\partial D}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial D}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial D}{\partial x_3} = 0,$$

où $F = F(x_1, x_2, x_3)$, $G = G(x_1, x_2, x_3)$, $D = D(x_1, x_2, x_3)$ sont les fonctions inconnues ; les coefficients de ces équations ont les formes suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2, \quad \alpha_{22} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2, \\ \alpha_{33} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2, \\ \alpha_{12} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \alpha_{23} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad \alpha_{31} = \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \\ l_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \right), \\ l_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right), \\ l_3 &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (\alpha_c)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \beta_{11} &= \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_3}, \quad \beta_{22} = \frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_3} + \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_1}, \\
 \beta_{33} &= \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_2}, \\
 \beta_{12} &= \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_1}, \quad \beta_{23} = \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_3} + \frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_2}, \\
 \beta_{31} &= \frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_3}, \\
 m_1 &= \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2}, \quad m_2 = \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}, \quad m_3 = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}, \\
 m'_1 &= \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad m'_2 = \frac{\partial^2 g}{\partial x_3 \partial x_1}, \quad m'_3 = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (\beta_c)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial d}{\partial x_2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial d}{\partial x_3}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial d}{\partial x_3} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial d}{\partial x_1}, \\
 \sigma_{33} &= \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial d}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial d}{\partial x_2}, \\
 \sigma_{12} &= \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial d}{\partial x_2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial d}{\partial x_1}, \quad \sigma_{23} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial d}{\partial x_3} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial d}{\partial x_2}, \\
 \sigma_{31} &= \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial d}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial d}{\partial x_3}, \\
 n_1 &= \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial^2 d}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial^2 d}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 d}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial x_3^2} \right), \\
 n_2 &= \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \frac{\partial^2 d}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial^2 d}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 d}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial x_1^2} \right), \\
 n_3 &= \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \frac{\partial^2 d}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \frac{\partial^2 d}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2 d}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial x_2^2} \right),
 \end{aligned} \right\} \quad (\sigma_c)$$

et :

$$l = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad m = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.5)$$

Dans les relations précédentes, $f = f(x_1, x_2, x_3)$, $g = g(x_1, x_2, x_3)$ et $d = d(x_1, x_2, x_3)$ sont trois fonctions, qui seront précisées plus loin. On suppose que : F, G, D, f, g, d sont des fonctions définies et de classe C^2 dans le domaine considéré.

Définitions. 1° On dira que l'équation $(\bar{\alpha})$ est « associée » à l'équation (α) , si $(\bar{\alpha})$ s'obtient en échangeant dans l'équation (α) le rôle

des fonctions $F(x_1, x_2, x_3)$ et $f(x_1, x_2, x_3)$; la fonction $f(x_1, x_2, x_3)$ devient alors la fonction inconnue et la fonction $F(x_1, x_2, x_3)$ remplace $f(x_1, x_2, x_3)$ dans les expressions (α_c) des coefficients.

On peut définir de même façon les équations $(\bar{\beta})$ ou $(\bar{\sigma})$, « associées » respectivement aux équations (β) ou (σ) .

2° On dira que les fonctions $F(x_1, x_2, x_3)$ et $f(x_1, x_2, x_3)$ sont « conjuguées par rapport à une équation du type (α) dans $(\mathcal{D})$ » ou « α -conjuguées dans $(\mathcal{D})$ », si :

a) la fonction $F(x_1, x_2, x_3)$ est une « solution formelle » dans $(\mathcal{D})$ d'une équation homogène ($l = 0$) du type (α) , dont les coefficients sont donnés, en fonction de $f(x_1, x_2, x_3)$, par les relations (α_c) et

b) la fonction $f(x_1, x_2, x_3)$ est une « solution formelle » dans $(\mathcal{D})$ de l'équation « associée » $(\bar{\alpha})$ nonhomogène ($l = -1$),
ou réciproquement.

On peut définir de façon analogue les fonctions $G(x_1, x_2, x_3)$ et $g(x_1, x_2, x_3)$, « conjuguées par rapport à une équation du type (β) dans $(\mathcal{D})$ » ou « β -conjuguées dans $(\mathcal{D})$ ».

Dans certains cas, il est possible de remplacer ces définitions globales par des définitions ayant un caractère local.

On observe que deux fonctions, qui sont « α -conjuguées » dans un domaine $(\mathcal{D})$, doivent satisfaire à deux équations du type (A_F) et (B_H) et que deux fonctions, qui sont « β -conjuguées » dans le même domaine $(\mathcal{D})$, doivent satisfaire à deux équations du type (A_H) et (B_F) .

L'équivalence des deux systèmes d'équations montre que, si deux fonctions sont « α -conjuguées » dans un domaine $(\mathcal{D})$, elles sont aussi « β -conjuguées » dans le même domaine; naturellement, la propriété réciproque est aussi vraie.

Les équations aux dérivées partielles du type (σ) étant toujours homogènes, la définition des deux fonctions « σ -conjuguées » doit être un peu différente des précédentes; plus précisément, dans ce cas la fonction $d(x_1, x_2, x_3)$, par exemple, doit satisfaire à l'équation « associée » $(\bar{\sigma})$ qui est aussi homogène. La fonction $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$, qui joue le rôle de paramètre, est la même dans les deux équations (σ) et $(\bar{\sigma})$.

En tenant compte du fait que les équations (A_H) , (B_H) , (A_F) , (B_F) , (D_F) , (D_H) appartiennent aux types d'équations définis précédemment, il est intéressant d'envisager, par exemple, la réduction de ces types d'équations à la forme normale.

§ 3. Une équation du type (α) est une équation aux dérivées partielles du second ordre, à trois variables, linéaire par rapport aux dérivées partielles, du premier et du second ordre, de la fonction inconnue; ses coefficients sont variables et ils dépendent, de manière connue, d'une certaine fonction $f(x_1, x_2, x_3)$.

En général, une équation aux dérivées partielles du second ordre, à trois variables, ne peut pas toujours se réduire à la forme normale; on va donc chercher sous quelles conditions une équation du type (α) peut être réduite à la forme normale.

Son équation caractéristique s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-s & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ -\alpha_{12} & \alpha_{22}-s & -\alpha_{23} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & \alpha_{33}-s \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} s^3 - (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) s^2 + (\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{22} \alpha_{33} + \alpha_{33} \alpha_{11} - \alpha_{12}^2 - \\ - \alpha_{23}^2 - \alpha_{31}^2) s + \alpha_{11} \alpha_{23}^2 + \alpha_{22} \alpha_{31}^2 + \alpha_{33} \alpha_{12}^2 - \alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33} + \\ + 2 \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} = 0; \end{aligned} \quad (3.6)$$

elle prend, pour les valeurs (α_c) des coefficients α_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), la forme suivante :

$$s^3 - 2 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \right] s^2 + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \right]^2 s = 0, \quad (3.7)$$

dont les racines sont :

$$s_1 = s_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 = \left| \text{grad } f \right|^2, \quad s_3 = 0. \quad (3.8)$$

Supposons qu'il existe un changement de variables :

$$\eta_i = \eta_i(x_1, x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.9)$$

pour lequel l'équation envisagée se réduit à la forme normale.

Pour $s = s_i$ ($i = 1, 2, 3$), le système d'équations homogènes, auquel doivent satisfaire les dérivées partielles des fonctions η_i , ($i = 1, 2, 3$), est :

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_{11} - s_i) \frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} - \alpha_{12} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_2} - \alpha_{13} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_3} &= 0, \\ -\alpha_{12} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} + (\alpha_{22} - s_i) \frac{\partial \eta_i}{\partial x_2} - \alpha_{23} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_3} &= 0, \\ -\alpha_{13} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} - \alpha_{23} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_2} + (\alpha_{33} - s_i) \frac{\partial \eta_i}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Pour $i = 1$, c'est-à-dire pour

$$s = s_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2,$$

et pour les valeurs (α_c) des coefficients α_{jk} ($j, k = 1, 2, 3$) le système (3.10) prendra la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

on a un système d'équations analogue pour

$$s = s_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2.$$

Si l'on suppose qu'en aucun point $M \in \mathcal{D}$ on ne peut avoir simultanément : $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$, alors le système d'équations (3.11) se réduit à une seule équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} = 0 \quad (3.12)$$

ou, sous une forme vectorielle :

$$\text{grad } f \cdot \text{grad } \eta_1 = 0; \quad (3.13)$$

pour la variable η_2 , on obtient la condition analogue :

$$\text{grad } f \cdot \text{grad } \eta_2 = 0. \quad (3.14)$$

Pour $s = s_3 = 0$, le système d'équations (3.10) devient :

$$\left. \begin{aligned} - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \right] \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \right] \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \right] \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

ce système peut être mis sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \right] \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial f}{\partial x_1}, \\ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \right] \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial f}{\partial x_2}, \\ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \right] \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial f}{\partial x_3}, \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

ou sous les formes vectorielles équivalentes :

$$|\text{grad } f|^2 \text{ grad } \eta_3 = (\text{grad } f \cdot \text{grad } \eta_3) \text{ grad } f, \quad (3.17)$$

$$\text{grad } f \wedge (\text{grad } \eta_3 \wedge \text{grad } f) = 0^{27}). \quad (3.17')$$

On obtient alors, pour la fonction $\eta_3(x_1, x_2, x_3)$ la condition suivante :

$$\eta_3 = \eta_3(f) \quad (3.18)$$

et il est possible de choisir, sans réduire la généralité des résultats,

$$\eta_3 = f(x_1, x_2, x_3). \quad (3.18')$$

On a donc obtenu le résultat suivant :

THÉOREME X. *La condition nécessaire et suffisante, qui doit être satisfaite pour qu'une équation aux dérivées partielles du type (α) puisse se réduire à la forme normale dans un domaine (D), est que la famille de surfaces $f(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$ ²⁸⁾ appartienne à un système triple orthogonal de familles de surfaces, en chaque point $M \in D$.*

Si cette condition n'est pas satisfaite, il est possible de trouver une forme «quasi normale». En vertu des relations (3.13), (3.14) et (3.18'), on peut choisir, comme fonctions $\eta_i(x_1, x_2, x_3)$, la fonction $f(x_1, x_2, x_3)$ et deux autres fonctions η_1 et η_2 , qui jouent le rôle de paramètres sur les surfaces $f(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$

L'équation considérée prend alors la forme suivante :

$$\tilde{\alpha}_{11} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_1^2} + \tilde{\alpha}_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_2^2} + 2\tilde{\alpha}_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} + \tilde{l}_1 \frac{\partial F}{\partial \eta_1} + \tilde{l}_2 \frac{\partial F}{\partial \eta_2} + l = 0, \quad (\tilde{\alpha})$$

où les coefficients introduits ont les valeurs :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}_{11} &= |\text{grad } f|^2 |\text{grad } \eta_1|^2, \quad \tilde{\alpha}_{22} = |\text{grad } f|^2 |\text{grad } \eta_2|^2, \\ \tilde{\alpha}_{12} &= |\text{grad } f|^2 (\text{grad } \eta_1 \cdot \text{grad } \eta_2), \quad \tilde{l}_1 = \text{div} [|\text{grad } f|^2 \text{ grad } \eta_1], \\ \tilde{l}_2 &= \text{div} [|\text{grad } f|^2 \text{ grad } \eta_2]. \end{aligned} \right\} \quad (\tilde{\alpha}_i)$$

Si l'on désigne par g_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) les composantes covariantes et par g^{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) les composantes contravariantes du tenseur fonda-

²⁷⁾ Les relations (3.13), (3.14), (3.17) ou (3.17') doivent être satisfaites en chaque point $M \in D$.

²⁸⁾ Où $f(x_1, x_2, x_3)$ est la fonction qui intervient dans les expressions (α) des coefficients de cette équation.

mental dans le système de coordonnées T_γ introduit précédemment, on a alors :

$$\left. \begin{aligned} g^{11} &= \frac{g_{22}}{G} = |\text{grad } \gamma_1|^2, & g^{22} &= \frac{g_{11}}{G} = |\text{grad } \gamma_2|^2, \\ g^{12} &= -\frac{g_{12}}{G} = \text{grad } \gamma_1 \cdot \text{grad } \gamma_2, & g^{33} &= \frac{1}{g_{33}} = |\text{grad } f|^2, \\ g^{13} &= 0, & g^{23} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

où : $G = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2$; dans ce cas, l'équation $(\tilde{\alpha})$ s'écrit : ²⁹⁾

$$\begin{aligned} & g_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_1^2} - 2 g_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} + g_{11} \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_2^2} + \left[\frac{\partial g_{22}}{\partial \gamma_1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \gamma_2} + \frac{g_{12}}{2g} \frac{\partial g}{\partial \gamma_2} - \right. \\ & \left. - \frac{g_{22}}{2g} \frac{\partial g}{\partial \gamma_1} \right] \frac{\partial F}{\partial \gamma_1} + \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial \gamma_2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \gamma_1} + \frac{g_{11}}{2g} \frac{\partial g}{\partial \gamma_1} - \frac{g_{12}}{2g} \frac{\partial g}{\partial \gamma_2} \right] \frac{\partial F}{\partial \gamma_2} + gl = 0, \end{aligned} \quad (\tilde{\alpha})$$

où : $g = g_{33} G$ est le déterminant fondamental.

Si l'on prend les valeurs :

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv H(x_1, x_2, x_3), F(x_1, x_2, x_3) \equiv \Psi(x_1, x_2, x_3), l = 0, \quad (3.20)$$

alors le système de coordonnées T_γ devient le système de coordonnées T_q introduit au (Ch. I, § 3) et l'équation $(\tilde{\alpha})$ devient l'équation (1.23), à laquelle doit satisfaire la fonction $\psi(q_1, q_2, q_3)$ sur chaque surface $q_3 = \text{const.}$

On peut donc appliquer, dans le cas des équations homogènes du type (α) , tous les résultats obtenus au (Ch. I, § 3—§ 6).

Ainsi, sur chaque surface $f(x_1, x_2, x_3) \equiv \gamma_3 = \text{const.}$, l'équation homogène $(\tilde{\alpha})$ peut être considérée comme une équation à deux variables γ_1 et γ_2 ; en dépendant, bien entendu, de γ_3 , elle n'est pas la même sur toutes les surfaces $f(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$

En adoptant ce point de vue, on voit que, sur chaque surface $f(x_1, x_2, x_3) \equiv \gamma_3 = \text{const.}$, l'équation à deux variables $(\tilde{\alpha})$ est du type elliptique dans le domaine considéré $(\mathcal{D})$, puisque :

$$G = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2 > 0 \text{ dans } (\mathcal{D}).$$

Ses caractéristiques sont donc imaginaires et, en employant les hypothèses et les notations du Ch. I. § 5, leurs équations s'écrivent :

$$Z = a + i b = C_0, \quad \bar{Z} = a - i b = C'_0, \quad (3.21)$$

où Z et $\bar{Z}$ sont donnés par les formules (1.34) et C_0, C'_0 sont des constantes imaginaires arbitraires.

En mettant l'équation $(\tilde{\alpha})$ sous la forme équivalente :

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_1} \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \gamma_2} - \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \gamma_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \gamma_2} \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \gamma_2} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \gamma_1} \right) = l \sqrt{g},$$

²⁹⁾ Dans le cas où le Théorème X est satisfait, on a dans l'équation $(\tilde{\alpha})$:

$$g_{12} = 0, \quad g = g_{11} g_{22} g_{33}.$$

on obtient, dans le cas des équations homogènes du type (α) , le système d'équations suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta_1} &= \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \eta_2} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \eta_1}, \\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta_2} &= \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \eta_2} - \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \eta_1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

où la fonction $\tilde{F}$ joue le rôle de la fonction φ (Ch. I, § 3).

Ainsi, si la fonction $f(x_1, x_2, x_3)$ est connue, on peut appliquer à l'étude des équations homogènes du type (α) tous les résultats du chapitre I, section B. L'étude des équations homogènes du type (α) est donc liée (par les relations établies dans ce paragraphe) à la théorie des fonctions « analytiques généralisées » (ou « pseudoanalytiques ») d'une variable complexe sur une surface donnée.

§ 4. On a vu, dans le paragraphe précédent, que les coefficients des dérivées partielles du second ordre de l'équation (α) et de son équation « associée » $(\bar{\alpha})$ étaient de même type, bien que leurs valeurs fussent toutefois différentes; les équations caractéristiques et le changement de variables, qui les réduisaient à la forme normale, différaient donc pour les deux équations (α) et $(\bar{\alpha})$.

Les relations (β_c) montrent que pour l'équation du type (β) et pour l'équation « associée » $(\bar{\beta})$ les coefficients des termes du second ordre sont identiques; par suite, elles ont la même équation caractéristique et, quand il est possible, le même changement de variables réduit les deux équations à la forme normale.

L'équation caractéristique (la même pour les deux équations considérées) est :

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} - s & -\frac{1}{2} \beta_{12} & -\frac{1}{2} \beta_{13} \\ -\frac{1}{2} \beta_{12} & \beta_{22} - s & -\frac{1}{2} \beta_{23} \\ -\frac{1}{2} \beta_{13} & -\frac{1}{2} \beta_{23} & \beta_{33} - s \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} s^3 - (\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33}) s^2 + \left(\beta_{11} \beta_{22} + \beta_{22} \beta_{33} + \beta_{33} \beta_{11} - \frac{1}{4} \beta_{12}^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \beta_{23}^2 - \frac{1}{4} \beta_{31}^2 \right) s + \frac{1}{4} (\beta_{12} \beta_{23} \beta_{31} + \beta_{11} \beta_{23}^2 + \beta_{22} \beta_{31}^2 + \beta_{33} \beta_{12}^2) - \\ - \beta_{11} \beta_{22} \beta_{33} = 0. \end{aligned}$$

Pour les valeurs (β_c) des coefficients β_{ik} ($j, k = 1, 2, 3$), cette équation algébrique du troisième degré prend la forme suivante :

$$s^3 - 2 (\text{grad } g \cdot \text{grad } G) s^2 + \left[\frac{5}{4} (\text{grad } g \cdot \text{grad } G)^2 - \frac{1}{4} |\text{grad } g|^2 |\text{grad } G|^2 \right] s + \frac{1}{4} (\text{grad } g \cdot \text{grad } G) [|\text{grad } g|^2 |\text{grad } G|^2 - (\text{grad } g \cdot \text{grad } G)^2] = 0 \quad (3.23)$$

et ses trois racines sont :

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} [(\text{grad } g \cdot \text{grad } G) + |\text{grad } g| |\text{grad } G|] = \\ &= |\text{grad } g| |\text{grad } G| \cos^2 \frac{(G, g)}{2}, \\ s_2 &= \frac{1}{2} [(\text{grad } g \cdot \text{grad } G) - |\text{grad } g| |\text{grad } G|] = \\ &= -|\text{grad } g| |\text{grad } G| \sin^2 \frac{(G, g)}{2}, \\ s_3 &= \text{grad } g \cdot \text{grad } G = |\text{grad } g| |\text{grad } G| \left[\cos^2 \frac{(G, g)}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 \frac{(G, g)}{2} \right] = s_1 + s_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

où on a désigné par (G, g) l'angle des vecteurs : $\text{grad } G$ et $\text{grad } g$, pris au même point $M \in \mathcal{D}$ (cet angle est donc une fonction des variables x_1, x_2, x_3); il n'est pas nécessaire de préciser l'orientation de cet angle.

Soit :

$$\zeta_i = \zeta_i(x_1, x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.25)$$

le changement de variables par lequel les équations (β) et $(\bar{\beta})$ se réduisent à la forme normale; un tel changement de variables peut exister si les fonctions ζ_i satisfont aux trois systèmes d'équations :

$$\left. \begin{aligned} (\beta_{11} - s_i) \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \beta_{12} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \beta_{13} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_3} &= 0, \\ -\frac{1}{2} \beta_{12} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_1} + (\beta_{22} - s_i) \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \beta_{23} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_3} &= 0, \quad (i = 1, 2, 3) \\ -\frac{1}{2} \beta_{13} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \beta_{23} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_2} + (\beta_{33} - s_i) \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Si l'on prend les valeurs β_{jk} ($j, k = 1, 2, 3$) données par les formules (β_c), on obtient, pour $i = 1$, le système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[|\text{grad } g| |\text{grad } G| + 2 \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_1} - (\text{grad } g \cdot \text{grad } G) \right] \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} + \\ & + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_3} + \frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_3} = 0, \\ & \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} + \left[|\text{grad } g| |\text{grad } G| + 2 \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_2} - \right. \\ & \quad \left. - (\text{grad } g \cdot \text{grad } G) \right] \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_3} + \frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_3} = 0, \\ & \left(\frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} + \\ & + \left[|\text{grad } g| |\text{grad } G| + 2 \frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_3} - (\text{grad } g \cdot \text{grad } G) \right] \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_3} = 0 \end{aligned} \right\}$$

et, en groupant convenablement les termes, on peut mettre ce système sous la forme vectorielle équivalente :

$$(\text{grad } \zeta_1 \cdot \text{grad } G) \text{grad } g + (\text{grad } \zeta_1 \cdot \text{grad } g) \text{grad } G = 2s_2 \text{grad } \zeta_1, \quad (3.27)$$

où s_2 est donné par les relations (3.24).

Un calcul analogue donne pour ζ_2 l'équation vectorielle suivante :

$$(\text{grad } \zeta_2 \cdot \text{grad } G) \text{grad } g + (\text{grad } \zeta_2 \cdot \text{grad } g) \text{grad } G = 2s_1 \text{grad } \zeta_2, \quad (3.28)$$

où s_1 est aussi donné par les relations (3.24).

Pour les valeurs (β_c) des coefficients β_{jk} ($j, k = 1, 2, 3$) et pour $i=3$, (3.26) prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} & 2 \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_2} + \\ & + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_3} + \frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_3} = 0, \\ & \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_2} + \\ & + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_3} + \frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_3} = 0, \\ & \left(\frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_2} + \\ & + 2 \frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial G}{\partial x_3} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_3} = 0, \end{aligned} \right\}$$

ou la forme vectorielle équivalente :

$$(\text{grad } \zeta_3 \cdot \text{grad } g) \text{grad } G + (\text{grad } \zeta_3 \cdot \text{grad } G) \text{grad } g = 0. \quad (3.29)$$

Par conséquent, pour trouver un changement de variables (3.25), les fonctions ζ_i ($i = 1, 2, 3$) doivent satisfaire aux conditions (3.27), (3.28) et (3.29).

On voit que la condition (3.29) est satisfaite, en tout point du domaine considéré ($\mathcal{D}$), seulement dans deux cas :

1° soit :

$$\text{grad } \zeta_3 \cdot \text{grad } g \equiv 0 \text{ et } \text{grad } \zeta_3 \cdot \text{grad } G \equiv 0 \text{ dans } (\mathcal{D}), \quad (3.30)$$

2° soit :

$$\text{grad } G \wedge \text{grad } g \equiv 0 \text{ dans } (\mathcal{D}). \quad (3.31)$$

Le dernier cas est équivalent à l'existence d'une relation du type : $\varphi(G, g) = 0$, en tous les points du domaine ($\mathcal{D}$).

Dans le premier cas, en multipliant scalairement les vecteurs des deux membres des équations (3.27) et respectivement (3.28) par $\text{grad } \zeta_3$, on obtient les conditions suivantes :

$$\text{grad } \zeta_3 \cdot \text{grad } \zeta_1 \equiv 0 \text{ et } \text{grad } \zeta_3 \cdot \text{grad } \zeta_2 \equiv 0, \text{ dans } (\mathcal{D}). \quad (3.32)$$

Par suite, les conditions (3.27), (3.28) et (3.29) assurent l'orthogonalité des vecteurs $\text{grad } \zeta_1$, $\text{grad } \zeta_3$ et respectivement $\text{grad } \zeta_2$, $\text{grad } \zeta_3$, en tous les points $M \in \mathcal{D}$. Il faut démontrer que, dans les mêmes conditions, les vecteurs $\text{grad } \zeta_1$ et $\text{grad } \zeta_2$ sont aussi orthogonaux en tous les points $M \in \mathcal{D}$.

Si l'on multiplie scalairement les vecteurs des deux membres de l'équation (3.27) par le vecteur $\text{grad } g$, on obtient :

$$\begin{aligned} & (\text{grad } \zeta_1 \cdot \text{grad } G) |\text{grad } g|^2 + (\text{grad } \zeta_1 \cdot \text{grad } g) (\text{grad } G \cdot \text{grad } g) = \\ & = (\text{grad } g \cdot \text{grad } G) (\text{grad } \zeta_1 \cdot \text{grad } g) - |\text{grad } g| \cdot |\text{grad } G| (\text{grad } \zeta_1 \cdot \text{grad } g) \end{aligned}$$

ou :

$$|\text{grad } g|^2 |\text{grad } G| |\text{grad } \zeta_1| [\cos(\zeta_1, G) + \cos(\zeta_1, g)] \equiv 0,$$

c'est-à-dire :

$$\cos(\zeta_1, G) + \cos(\zeta_1, g) \equiv 0 \text{ dans } (\mathcal{D}); \quad (3.33)$$

on a désigné par (ζ_1, G) et respectivement (ζ_1, g) les angles formés par les vecteurs $\text{grad } \zeta_1$, $\text{grad } G$ (respectivement $\text{grad } \zeta_1$, $\text{grad } g$) en chaque point $M \in \mathcal{D}$.

Si l'on utilise des relations analogues, le même procédé de calcul appliqué à l'équation vectorielle (3.28) donne la condition suivante :

$$\cos(\zeta_2, G) - \cos(\zeta_2, g) \equiv 0 \text{ dans } (\mathcal{D}).^{30)} \quad (3.34)$$

³⁰⁾ L'orientation de ces angles peut rester arbitraire, puisque dans les relations (3.33) et (3.34) interviennent seulement leurs cosinus.

Les conditions (3.33) et (3.34) donnent :

$$\left. \begin{aligned} (\zeta_1, G) \pm (\zeta_1, g) &= \pi, \\ (\zeta_2, G) \mp (\zeta_2, g) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

En vertu des relations (3.30) et (3.32), les vecteurs : grad ζ_1 , grad ζ_2 , grad G et grad g sont coplanaires en chaque point $M \in \mathcal{D}$; les relations (3.35) donnent donc le résultat cherché :

$$(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{\pi}{2}, \text{ en chaque point } M \in \mathcal{D}. \quad (3.36)$$

On peut formuler le théorème suivant :

THÉOREME XI. *Si une équation aux dérivées partielles, à trois variables, du type (β) ou $(\bar{\beta})$ peut se réduire à la forme normale dans un domaine $(\mathcal{D})$ par un changement de variables (3.25), alors les trois fonctions ζ_i (x_1, x_2, x_3) définies par (3.25) satisfont aux conditions (3.27), (3.28) et (3.29) dans le domaine $(\mathcal{D})$; les trois conditions sont nécessaires et suffisantes.*

On s'aperçoit aisément que les coefficients des dérivées partielles du second ordre d'une équation du type (σ) ou $(\bar{\sigma})$ ont la même forme analytique que les coefficients respectifs d'une équation du type (β) ; la seule différence réside dans le fait que les fonctions $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$ et $d(x_1, x_2, x_3)$, (resp. $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$ et $D(x_1, x_2, x_3)$), dans le cas d'une équation du type (σ) , (resp. $(\bar{\sigma})$), jouent le rôle des fonctions $g(x_1, x_2, x_3)$ et $G(x_1, x_2, x_3)$ dans ces coefficients. Cette remarque permet de transposer directement les résultats trouvés pour les équations du type (β) . Ainsi, l'équation caractéristique d'une équation du type (σ) est la suivante :

$$\left. \begin{aligned} &s^3 - 2(\text{grad } \Lambda \cdot \text{grad } d)s^2 + \\ &+ \left[\frac{5}{4}(\text{grad } \Lambda \cdot \text{grad } d)^2 - \frac{1}{4}|\text{grad } \Lambda|^2|\text{grad } d|^2 \right]s + \\ &+ \frac{1}{4}(\text{grad } \Lambda \cdot \text{grad } d)[|\text{grad } \Lambda|^2|\text{grad } d|^2 - (\text{grad } \Lambda \cdot \text{grad } d)^2] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

avec les racines :

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}[\text{grad } \Lambda \cdot \text{grad } d + |\text{grad } \Lambda||\text{grad } d|] = \\ &= |\text{grad } \Lambda||\text{grad } d| \cos^2 \frac{(\Lambda, d)}{2}, \\ s_2 &= \frac{1}{2}[\text{grad } \Lambda \cdot \text{grad } d - |\text{grad } \Lambda||\text{grad } d|] = \\ &= -|\text{grad } \Lambda||\text{grad } d| \sin^2 \frac{(\Lambda, d)}{2}, \\ s_3 &= \text{grad } \Lambda \cdot \text{grad } d = \\ &= |\text{grad } \Lambda||\text{grad } d| \left[\cos^2 \frac{(\Lambda, d)}{2} - \sin^2 \frac{(\Lambda, d)}{2} \right] = s_1 + s_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

³¹⁾ La notation (Λ, d) a une signification similaire à la notation (G, g) , qui a été expliquée précédemment.

Si :

$$\chi_i = \chi_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.39)$$

est le changement de variables par lequel l'équation considérée se réduit à la forme normale, alors les fonctions χ_1, χ_2, χ_3 , doivent satisfaire aux conditions suivantes :

$$(\text{grad } \chi_1 \cdot \text{grad } \Lambda) \text{ grad } d + (\text{grad } \chi_1 \cdot \text{grad } d) \text{ grad } \Lambda = 2 s_2 \text{ grad } \chi_1, \quad (3.40)$$

$$(\text{grad } \chi_2 \cdot \text{grad } \Lambda) \text{ grad } d + (\text{grad } \chi_2 \cdot \text{grad } d) \text{ grad } \Lambda = 2 s_1 \text{ grad } \chi_2, \quad (3.41)$$

$$(\text{grad } \chi_3 \cdot \text{grad } \Lambda) \text{ grad } d + (\text{grad } \chi_3 \cdot \text{grad } d) \text{ grad } \Lambda = 0, \quad (3.42)$$

qui sont analogues respectivement aux conditions (3.27), (3.28) et (3.29); dans les relations (3.40) et (3.41) s_2 et s_1 ont les valeurs données par (3.38).

Par des méthodes analogues à celles déjà employées dans le cas des équations du type (β), on obtient les conditions similaires pour les fonctions $\chi_1(x_1, x_2, x_3)$, $\chi_2(x_1, x_2, x_3)$ et $\chi_3(x_1, x_2, x_3)$:

$$\text{grad } \chi_3 \cdot \text{grad } d \equiv 0 \text{ et } \text{grad } \chi_3 \cdot \text{grad } \Lambda \equiv 0 \text{ dans } (\mathcal{D}) \quad (3.43)$$

ou

$$\text{grad } d \wedge \text{grad } \Lambda \equiv 0 \text{ dans } (\mathcal{D}) \quad (3.44)$$

et :

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } \chi_1 \cdot \text{grad } \chi_2 &\equiv 0, & \text{grad } \chi_2 \cdot \text{grad } \chi_3 &\equiv 0, \\ \text{grad } \chi_3 \cdot \text{grad } \chi_1 &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \text{ dans } (\mathcal{D}). \quad (3.45)$$

Le résultat obtenu peut donc être formulé de la même façon :

THÉOREME XII. *Si une équation aux dérivées partielles, à trois variables, du type (σ) peut se réduire à la forme normale dans un domaine ($\mathcal{D}$) par un changement de variables (3.39), alors les trois fonctions $\chi_i(x_1, x_2, x_3)$ définies par (3.39) satisfont aux conditions (3.40) (3.41) et (3.42) dans le domaine ($\mathcal{D}$); les trois conditions sont nécessaires et suffisantes.*

Des résultats similaires peuvent être obtenus pour l'équation « associée » ($\bar{\sigma}$), si l'on remplace dans les formules précédentes la fonction $d(x_1, x_2, x_3)$ par la fonction $D(x_1, x_2, x_3)$.

§ 5. Il faut voir maintenant quelles sont les conséquences des résultats obtenus dans les deux paragraphes précédents pour les écoulements étudiés.

Ainsi, l'équation (A_F) est une équation homogène du type (α) pour la fonction de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et l'équation (B_H) est son équation « associée » non homogène; par suite, la fonction de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et l'énergie totale $H(x_1, x_2, x_3)$ sont « α -conjuguées » dans le domaine ($\mathcal{D}$) de l'écoulement considéré.

En vertu du Théorème X, l'équation homogène (A_F) peut se réduire à la forme normale dans un domaine ($\mathcal{D}$), si la famille de surfaces isoénergétiques $H(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$ appartient, en chaque point $M \in \mathcal{D}$, à

un système triple orthogonal de familles de surfaces ; en vertu du même théorème, l'équation non homogène (B_H) peut se réduire à la forme normale dans un domaine $(\mathcal{D})$, si la famille de surfaces de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$ appartient, en chaque point $M \in \mathcal{D}$, à un système triple orthogonal de familles de surfaces.

L'équation (A_H) est une équation homogène du type (β) pour l'énergie totale $H(x_1, x_2, x_3)$ et l'équation (B_Ψ) est son équation « associée », non homogène ; la fonction de courant et l'énergie totale sont donc des fonctions « β — conjuguées » dans le domaine $(\mathcal{D})$ de l'écoulement considéré. Si les deux équations peuvent se réduire à la forme normale dans un domaine $(\mathcal{D})$, alors, en vertu des relations (3.30), il existe une fonction $\zeta_3(x_1, x_2, x_3)$ telle que :

$$\text{grad } \zeta_3 \wedge (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) = 0,$$

en tous les points $M \in \mathcal{D}$. Par conséquent, on a :

$$\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H = \tau(x_1, x_2, x_3) \text{grad } \zeta_3$$

et l'on obtient les expressions suivantes :

$$\vec{v} = \tau \text{grad } \zeta_3, \quad \vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} = \text{grad } \tau \wedge \text{grad } \zeta_3, \quad (3.46)$$

pour la vitesse $\vec{v}$ et pour le tourbillon $\vec{\omega}$.

Les équations (A_H) et (B_Ψ) peuvent donc se réduire à la forme normale dans un domaine $(\mathcal{D})$, si les conditions (3.46) sont satisfaites, c'est-à-dire seulement lorsqu'on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{\omega} \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}); \quad (3.47)$$

il faut préciser que cette condition est nécessaire, mais non suffisante.

L'équation (D_Ψ) est une équation du type (σ) pour la fonction de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et l'équation (D_H) est son équation « associée ». L'équation (D_Ψ) peut se réduire à la forme normale s'il existe — en vertu des relations (3.43) — une fonction $\chi_3(x_1, x_2, x_3)$ telle que :

$$\text{grad } \chi_3 \wedge (\text{grad } H \wedge \text{grad } \Lambda) \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D});$$

cette condition implique la relation suivante :

$$\text{grad } H \wedge \text{grad } \Lambda = \tau_1(x_1, x_2, x_3) \text{grad } \chi_3 \quad \text{dans } (\mathcal{D}).$$

La réduction à la forme normale est donc possible seulement lorsque l'on a :

$$\vec{\omega} \cdot \text{rot } \vec{\omega} \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}). \quad (3.48)$$

Un calcul analogue montre que l'équation (D_H) peut se réduire à la forme normale seulement si la condition nécessaire :

$$\vec{\delta} \cdot \text{rot } \vec{\delta} \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}) \quad (3.49)$$

est satisfaite.

Il faut aussi préciser que les possibilités : (3.31) — dans le cas des équations du type (β) — et (3.44) — dans le cas des équations du type

(σ) ou $(\bar{\sigma})$ — ne présentent pas d'intérêt pour le problème de mécanique. En effet, l'hypothèse (3.31) implique l'existence d'une relation du type :

$$\varphi_1(\Psi, H) \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D})$$

et l'hypothèse (3.44) implique l'existence d'une relation similaire :

$$\varphi_2(H, \Lambda) \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D});$$

la même hypothèse écrite pour l'équation $(\bar{\sigma})$ — c'est-à-dire pour l'équation (D_H) —, implique l'existence d'une relation analogue :

$$\varphi_3(\Lambda, \Psi) \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}).$$

L'introduction des équations du type (α) , (β) et (σ) a donc permis d'envisager, dans un cadre plus général, la réduction à la forme normale des équations de notre problème ; ainsi, nous avons trouvé les conditions dans lesquelles ces équations peuvent se réduire à la forme normale et nous avons mis en évidence quelques conséquences physiques simples et directes de ces conditions.

Nous pensons qu'il est nécessaire, avant de finir ce chapitre, d'ajouter quelques remarques et précisions en ce qui concerne l'importance et l'intérêt pratique d'une telle étude pour le problème de mécanique envisagé dans ce travail ; ces questions seront toutefois étudiées, d'une manière plus générale et plus détaillée, dans un autre travail.

On s'aperçoit ainsi qu'on a envisagé le problème de la réduction à la forme normale séparément, pour chaque équation considérée, en l'ordonnant suivant les dérivées partielles du second ordre des différentes fonctions inconnues qu'elle contient ; on n'a pas cherché dans quels cas ou sous quelles conditions on peut réduire à la forme normale les deux (ou les trois) équations du système envisagé, par le même changement de variables ou pour la même fonction inconnue.

Les développements du chapitre suivant compléteront partiellement les résultats précédents ; ainsi, on verra que les deux « paramètres » Ψ_0 et H_0 vérifient deux équations, qui ont les mêmes premiers membres que les équations (A) et respectivement (B) du système « réduit » (§). Tous les résultats de ce chapitre resteront donc valables dans ce cas. On trouvera également la correspondance qui existe entre la réduction à la forme normale de ces équations et la manière dans laquelle varient les trois paramètres indépendants de l'écoulement ; la notion de « stricte-indépendance » définie au (Ch. II, § 3) sera ainsi liée au problème de la réduction à la forme normale.

On verra aussi que, dans des cas très généraux (qui comprennent, parmi d'autres classes d'écoulements, les écoulements plans et les écoulements à symétrie axiale), l'équation homogène — à laquelle doivent satisfaire les « paramètres » Ψ_0 et H_0 — se réduit à une identité ; dans ce cas, la réduction à la forme normale de l'équation non homogène, considérée séparément, présente un intérêt certain.

CHAPITRE IV

L'étude des écoulements de classe (C_i) à l'aide du système «réduit» (§)

§ 1. La manière dans laquelle on introduit le système «réduit» (§) et le rapport qui existe entre les systèmes d'équations (II_i) et (§) ont été déjà montrés en détail au début du chapitre précédent; dans ce chapitre on envisagera le rôle joué par le système «réduit» (§) dans une étude mathématique exacte des écoulements de classe (C_i) .

Le système «réduit» (§) sera considéré ici comme un système de «conditions nécessaires» auxquelles les fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$ doivent satisfaire, car on a précisé précédemment qu'il exprime les deux «conditions physiques» imposées par le système initial (II_i) aux fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$; il faudra aussi envisager le degré de détermination assuré par le système d'équations (§) aux fonctions inconnues $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$ en l'absence de tout problème aux limites.

Le système «réduit» (§) ne contenant que deux équations du système de cinq équations scalaires et indépendantes qui régissent la classe d'écoulements (C_i) , il ne peut conduire qu'à la détermination d'une classe d'écoulements (et non d'un seul écoulement). Plus précisément, à chaque solution «formelle» du système «réduit» (§) correspondra une classe d'écoulements, qui sera un sous ensemble de l'ensemble d'écoulements (C_i) ; par suite, on cherchera à obtenir des solutions «formelles» (et même des classes de solutions «formelles») du système «réduit» (§).

Dans la première partie de ce chapitre on donnera une méthode générale et exacte, qui conduit à la construction des classes de solutions «formelles» du système «réduit» (§) et qui précise, en même temps, les conditions caractérisant les classes construites; ensuite, on mettra en évidence le rapport qui existe entre cette méthode et les voies habituelles d'étude des écoulements de classe (C_i) . On retrouvera ainsi, dans un cadre plus général, les principaux résultats classiques de ce type, on pourra les généraliser de façon directe et naturelle et on obtiendra même des résultats nouveaux.

En général, la signification physique des fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, $H(x_1, x_2, x_3)$ et leur interdépendance nous empêchent d'agir directement sur leurs expressions, en vue d'obtenir quelques simplifications utiles ou de déduire certains cas particuliers déjà connus.

On fera donc un changement de fonctions du type :

$$\Psi = L(\Psi_0, H_0), \quad H = K(\Psi_0, H_0), \quad (4.1)$$

ou

$$\Psi_0 = L_0(\Psi, H), \quad H_0 = K_0(\Psi, H), \quad (4.1')$$

pour élargir ainsi les possibilités d'action sur les équations du système «réduit» (§) et sur ses fonctions inconnues. Quelques précisions s'imposent relativement à ce changement de fonctions et au sens dans lequel il est employé ici; on utilisera de nouveau le «troisième système naturel» de coordonnées curvilignes $T_{\bar{p}}$ pour mieux préciser les idées.

Soit (a_i, b_i) les intervalles de variation des coordonnées cartésiennes orthogonales x_i ($i = 1, 2, 3$) qui définissent le domaine $(\mathcal{D})$ de l'écoulement considéré; ces intervalles (a_i, b_i) doivent être précisés en fonction du problème concret envisagé et on ne fera ici aucune hypothèse restrictive sur eux. Ils peuvent donc définir un domaine $(\mathcal{D})$ borné ou non borné, simple ou multiple connexe, etc.; naturellement, l'ensemble de points ainsi défini doit être un ensemble continu et connexe et ses frontières doivent être suffisamment régulières pour représenter un phénomène physique.

On suppose que $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, $H(x_1, x_2, x_3)$ et $t(x_1, x_2, x_3)$ sont des fonctions définies et de classe C^2 dans le domaine $(\mathcal{D})$ ainsi défini; l'énergie totale H et la fonction «temps» t doivent être des fonctions uniformes de x_1, x_2, x_3 , à cause de leur signification physique. La fonction de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ est, en général, une fonction multiforme de ses variables, car on peut attacher une infinité (une classe) de fonctions Ψ à un écoulement donné, pour lequel l'énergie totale $H(x_1, x_2, x_3)$ et la famille des lignes de courant sont précisées (Voir Ch. II, § 3).

Lorsque les variables cartésiennes x_i ($i = 1, 2, 3$) prennent toutes les valeurs possibles dans les intervalles (a_i, b_i) , les fonctions $t(x_1, x_2, x_3)$, $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$ vont varier sur les courbes coordonnées du système curviligne $T_{\bar{p}}$ entre leurs bornes inférieures et leurs bornes supérieures (qui peuvent avoir des valeurs finies ou infinies).

Les fonctions $\bar{p}_2 \equiv \Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $\bar{p}_3 \equiv H(x_1, x_2, x_3)$ définissent de cette façon un certain domaine bidimensionnel sur chaque surface $\bar{p}_1 = \text{const.}$; ce domaine bidimensionnel variant, en général, d'une surface $\bar{p}_1 = \text{const.}$ à l'autre, sera désigné par (Δ_t) .

Le domaine (Δ_t) sera «le même» sur chaque surface de la famille $\bar{p}_1 \equiv t(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$, si chacune des fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$ est «strictement indépendante» par rapport à la fonction $t(x_1, x_2, x_3)$, et seulement dans ce cas; c'est le cas défini par les conditions (2.60) et envisagé dans (Ch. II, § 6).

Le rôle de la fonction «temps» $t(x_1, x_2, x_3)$ dans ces considérations peut être aussi joué par tout paramètre ξ , qui peut définir la position d'une particule fluide sur chaque ligne de courant (Voir Ch. II, § 3); en choisissant $\xi = t(x_1, x_2, x_3)$, on n'introduit aucune hypothèse restrictive. Si les conditions (2.60) sont remplies, il suffit de connaître le domaine (Δ_t) sur une seule surface de la famille $\bar{p}_1 \equiv t(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$; dans ce cas, on désigne ce domaine par (Δ) .

Supposons que $L_0(\Psi, H)$ et $K_0(\Psi, H)$ sont deux fonctions définies et de classe C^2 dans chaque domaine (Δ_t) ; il en résulte que les fonctions

$\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ données par (4.1') sont des fonctions définies et de classe C^2 dans le domaine $(\mathcal{D})$. Si les fonctions $L_0(\Psi, H)$ et $K_0(\Psi, H)$ satisfont aussi à la condition suivante :

$$J_0 \equiv \frac{D(L_0, K_0)}{D(\Psi, H)} \neq 0, \quad (4.2')$$

en tous les points de chaque domaine (Δ_i) , alors les relations (4.1') définissent un changement de variables dans chaque domaine (Δ_i) ; on désignera par T_p le système de coordonnées curvilignes ainsi obtenu :

$$\begin{aligned} \bar{p}_1^* = \bar{p}_1 = t(x_1, x_2, x_3), \bar{p}_2^* = \Psi_0 = L_0(\bar{p}_2, \bar{p}_3), \\ \bar{p}_3^* = H_0 = K_0(\bar{p}_2, \bar{p}_3). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ constituent donc un autre système de paramètres qui définissent la famille de lignes de courant.

Dans la relation (4.2') et dans toutes les relations qui vont suivre, les dérivées partielles des fonctions $L_0(\Psi, H)$ et $K_0(\Psi, H)$ sont calculées par rapport aux variables $\bar{p}_i$ ($i = 1, 2, 3$) définies précédemment.

Par conséquent, les fonctions $L_0(\Psi, H)$, $K_0(\Psi, H)$ et toutes leurs dérivées partielles ne dépendent de x_1, x_2, x_3 , que par l'intermédiaire des fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$.

Dans ce cas, on déduit aisément les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (a) \text{ grad } \Psi_0 &= \frac{\partial L_0}{\partial \Psi} \text{ grad } \Psi + \frac{\partial L_0}{\partial H} \text{ grad } H, \\ (b) \text{ grad } H_0 &= \frac{\partial K_0}{\partial \Psi} \text{ grad } \Psi + \frac{\partial K_0}{\partial H} \text{ grad } H, \\ (c) \text{ grad } \Psi_0 \wedge \text{ grad } H_0 &= J_0 \text{ grad } \Psi \wedge \text{ grad } H, \end{aligned} \right\} \quad (4.4')$$

et

$$\text{grad } J_0 = \frac{\partial J_0}{\partial \Psi} \text{ grad } \Psi + \frac{\partial J_0}{\partial H} \text{ grad } H. \quad (4.5')$$

Ces relations montrent que chacune des fonctions Ψ_0 , H_0 et J_0 est une fonction « strictement indépendante » par rapport à la fonction « temps » $t(x_1, x_2, x_3)$, si $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$ sont des fonctions « strictement indépendantes » par rapport à $t(x_1, x_2, x_3)$, et seulement dans ce cas.

Dans le cadre des hypothèses précédentes, la transformation inverse de (4.1') existe et elle a la forme (4.1); le rôle des fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, $H_0(x_1, x_2, x_3)$ et le sens du changement de fonctions (4.1') étant précisés, on peut prendre le changement de fonctions (4.1) comme point de départ. On suppose, dans ce cas, que $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ sont deux

fonctions définies et de classe C^2 dans le domaine $(\mathcal{D})$, qui peuvent constituer un système de paramètres définissant la famille de lignes de courant.

Les fonctions $\bar{p}_2^* = \Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $\bar{p}_3^* = H_0(x_1, x_2, x_3)$ déterminent un domaine (Δ_i^*) sur chaque surface $\bar{p}_1^* \equiv t(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$ du système de coordonnées curvilignes $T_{\bar{p}_1^*}$; en général, les domaines (Δ_i) et (Δ_i^*) , qui se trouvent sur la même surface $t(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$, ne sont pas identiques. Si chacune des fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction « strictement indépendante » par rapport à $t(x_1, x_2, x_3)$, alors il suffit de connaître le domaine (Δ_i^*) sur une seule surface de la famille $t(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$; dans ce cas, on désigne ce domaine par (Δ^*) .

On suppose également que $L(\Psi_0, H_0)$ et $K(\Psi_0, H_0)$ sont des fonctions définies et de classe C^2 dans chaque domaine (Δ_i^*) et qu'elles satisfont à la condition suivante :

$$J \equiv \frac{D(L, K)}{D(\Psi_0, H_0)} \neq 0, \quad (4.2)$$

en tous les points de chaque domaine (Δ_i^*) ; dans (4.2) et dans toutes les relations suivantes, les dérivées partielles des fonctions $L(\Psi_0, H_0)$ et $K(\Psi_0, H_0)$ sont calculées par rapport aux variables $\bar{p}_i^*$ ($i = 1, 2, 3$) définies précédemment. Il en résulte que les fonctions $L(\Psi_0, H_0)$, $K(\Psi_0, H_0)$ et toutes leurs dérivées partielles ne dépendent de x_1, x_2, x_3 , que par l'intermédiaire des fonctions $\bar{p}_2^* = \Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $\bar{p}_3^* = H_0(x_1, x_2, x_3)$. On a donc :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \text{grad } \Psi &= \frac{\partial L}{\partial \Psi_0} \text{grad } \Psi_0 + \frac{\partial L}{\partial H_0} \text{grad } H_0, \\ (b) \quad \text{grad } H &= \frac{\partial K}{\partial \Psi_0} \text{grad } \Psi_0 + \frac{\partial K}{\partial H_0} \text{grad } H_0, \\ (c) \quad \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H &= J \text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

et

$$\text{grad } J = \frac{\partial J}{\partial \Psi_0} \text{grad } \Psi_0 + \frac{\partial J}{\partial H_0} \text{grad } H_0. \quad (4.5)$$

On en déduit que chacune des fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, $H(x_1, x_2, x_3)$ et $J(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction « strictement indépendante » par rapport à $t(x_1, x_2, x_3)$ — ou à toute autre fonction $\xi(x_1, x_2, x_3)$ — si, et seulement si, les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ sont « strictement indépendantes » par rapport à $t(x_1, x_2, x_3)$ — ou à la fonction choisie $\xi(x_1, x_2, x_3)$.

Il est intéressant d'envisager non seulement le cas quand chacun des « paramètres » $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, $H_0(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction « stric-

tement indépendante » par rapport à $t(x_1, x_2, x_3)$ — ou à tout autre « paramètre » similaire $\xi(x_1, x_2, x_3)$ —, mais aussi le cas quand les deux « paramètres » Ψ_0, H_0 varient d'une manière « strictement indépendante » par rapport aux variables cartésiennes x_1, x_2, x_3 . En vertu du Théorème IV, ce dernier cas est défini par la condition suivante :

$$\text{grad } \Psi_0 \cdot \text{grad } H_0 = 0, \quad (4.6)$$

qui doit être remplie partout dans le domaine ($\mathcal{D}$). Les deux cas peuvent être considérés ensemble ou séparément; leur signification physique sera mise en évidence plus loin.

§ 2. Les « paramètres » $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, $H_0(x_1, x_2, x_3)$ et les expressions analytiques des fonctions $L(\Psi_0, H_0)$, $K(\Psi_0, H_0)$ doivent être déterminés de telle manière que les fonctions correspondantes $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$ satisfassent aux équations du système « réduit » (§); il faut donc introduire le changement de fonctions (4.1) dans les deux équations de ce système. Dans ce but, les relations (4.4) et (4.5) donnent :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) &= J \text{rot}(\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0) + \\ &+ \text{grad } J \wedge (\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0) = J \text{rot}(\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0) + \\ &+ [P(\text{grad } \Psi_0 \cdot \text{grad } H_0) + Q|\text{grad } H_0|^2] \text{grad } \Psi_0 - \\ &- [P|\text{grad } \Psi_0|^2 + Q(\text{grad } \Psi_0 \cdot \text{grad } H_0)] \text{grad } H_0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

en employant les notations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{\partial J}{\partial \Psi_0} = \frac{\partial K}{\partial H_0} \frac{\partial^2 L}{\partial \Psi_0^2} - \frac{\partial L}{\partial H_0} \frac{\partial^2 K}{\partial \Psi_0^2} + \frac{\partial L}{\partial \Psi_0} \frac{\partial^2 K}{\partial \Psi_0 \partial H_0} - \frac{\partial K}{\partial \Psi_0} \frac{\partial^2 L}{\partial \Psi_0 \partial H_0}, \\ Q &= \frac{\partial J}{\partial H_0} = \frac{\partial K}{\partial H_0} \frac{\partial^2 L}{\partial \Psi_0 \partial H_0} - \frac{\partial L}{\partial H_0} \frac{\partial^2 K}{\partial \Psi_0 \partial H_0} + \frac{\partial L}{\partial \Psi_0} \frac{\partial^2 K}{\partial H_0^2} - \frac{\partial K}{\partial \Psi_0} \frac{\partial^2 L}{\partial H_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

En introduisant les expressions (4.4) et (4.7) dans les équations du système « réduit » (§), on obtient la forme suivante de ce système :

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{A}) \quad & J \left(M_0 \frac{\partial K}{\partial \Psi_0} + N_0 \frac{\partial K}{\partial H_0} \right) + V_0^2 \left(Q \frac{\partial K}{\partial \Psi_0} - P \frac{\partial K}{\partial H_0} \right) = 0, \\ (\tilde{B}) \quad & J \left(M_0 \frac{\partial L}{\partial \Psi_0} + N_0 \frac{\partial L}{\partial H_0} \right) + V_0^2 \left(Q \frac{\partial L}{\partial \Psi_0} - P \frac{\partial L}{\partial H_0} \right) = 1; \end{aligned} \right\} \quad (\tilde{\S})$$

Les notations utilisées sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \text{rot}(\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0) \cdot \text{grad } \Psi_0, \\ N_0 &= \text{rot}(\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0) \cdot \text{grad } H_0, \\ V_0^2 &= |\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0|^2 = |\text{grad } \Psi_0|^2 |\text{grad } H_0|^2 - \\ &\quad - (\text{grad } \Psi_0 \cdot \text{grad } H_0)^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Les expressions M_0 , N_0 , V_0 ainsi définies sont des fonctions de x_1, x_2, x_3 ; le système d'équations ($\tilde{\mathcal{S}}$) peut donc être envisagé de deux façons différentes. Soit que l'on considère qu'il est écrit dans le système de coordonnées cartésiennes T_x , et alors il faut remplacer toutes les fonctions

$\left(J, P, Q, \frac{\partial K}{\partial \Psi_0}, \frac{\partial L}{\partial \Psi_0} \text{ etc. } \dots \right)$ par leurs expressions en fonction des

variables x_1, x_2, x_3 , en utilisant dans ce but les relations (4.1). Soit que l'on considère qu'il est écrit dans le système de coordonnées curvilignes $T_{\bar{x}}$, et alors il faut remplacer les fonctions M_0, N_0 et V_0 par leurs expressions en fonction de $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ et $\bar{p}_3$; on désignera les expressions ainsi obtenues par M_0^*, N_0^* et respectivement V_0^* .

Le nombre des fonctions inconnues et la forme analytique des équations du système ($\tilde{\mathcal{S}}$) offrent plusieurs possibilités de construire des classes de solutions « formelles » de ce système.

Si l'on donne, par exemple, les expressions analytiques des fonctions $L(\Psi_0, H_0)$ et $K(\Psi_0, H_0)$ — c'est-à-dire la dépendance de la fonction de courant et respectivement de l'énergie totale par rapport aux « paramètres » Ψ_0, H_0 — alors le système ($\tilde{\mathcal{S}}$) reste à déterminer les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$.

On peut donner les expressions analytiques des « paramètres » $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ — c'est-à-dire on donne la famille de lignes de courant —; dans ce cas, ($\tilde{\mathcal{S}}$) donne deux équations qui lient les dérivées partielles du premier et du second ordre des fonctions $L(\Psi_0, H_0)$ et $K(\Psi_0, H_0)$.

On peut obtenir des résultats beaucoup plus significatifs, si l'on emploie un procédé intermédiaire; dans ce but, on met le système d'équations ($\tilde{\mathcal{S}}$) sous la forme équivalente :

$$\left. \begin{aligned} (JM_0^* + QV_0^{*2}) \frac{\partial K}{\partial \Psi_0} + (JN_0^* - PV_0^{*2}) \frac{\partial K}{\partial H_0} &= 0, \\ (JM_0^* + QV_0^{*2}) \frac{\partial L}{\partial \Psi_0} + (JN_0^* - PV_0^{*2}) \frac{\partial L}{\partial H_0} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Les valeurs des expressions : $JM_0^* + QV_0^{*2}$ et $JN_0^* - PV_0^{*2}$ peuvent toujours être calculées d'ici, puisque l'on a supposé $J \neq 0$ en tous les points de chaque domaine (Δ_i); on a :

$$\left. \begin{aligned} JM_0^* + QV_0^{*2} &= \frac{1}{J} \frac{\partial K}{\partial H_0}, \\ JN_0^* - PV_0^{*2} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial K}{\partial \Psi_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

En éliminant la fonction K entre les deux équations du système (4.11), on obtient la condition suivante :

$$J \left(\frac{\partial M_0^*}{\partial \Psi_0} + \frac{\partial N_0^*}{\partial H_0} \right) + P \left[2M_0^* - \frac{\partial (V_0^{*2})}{\partial H_0} \right] + Q \left[2N_0^* + \frac{\partial (V_0^{*2})}{\partial \Psi_0} \right] = 0, \quad (4.12)$$

qui est une « condition de compatibilité ».

Les relations précédentes permettent de construire certaines classes de solutions particulières du système d'équations ($\tilde{\mathcal{S}}$), en agissant simultanément sur les fonctions $L(\Psi_0, H_0)$, $K(\Psi_0, H_0)$, d'une part, et sur les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, $H_0(x_1, x_2, x_3)$, d'autre part.

Supposons, par exemple, que les fonctions $L(\Psi_0, H_0)$ et $K(\Psi_0, H_0)$ satisfont à la condition suivante :

$$J = \frac{D(L, K)}{D(\Psi_0, H_0)} \equiv C_0, \quad (C_0 \text{ constante}) \quad (4.13)$$

en tous les points de chaque domaine (Δ_i^*); on peut toujours prendre la constante C_0 égale à l'unité sans introduire ainsi une hypothèse supplémentaire; dans ce cas, l'on a :

$$P = \frac{\partial J}{\partial \Psi_0} \equiv 0 \quad \text{et} \quad Q = \frac{\partial J}{\partial H_0} \equiv 0, \quad (4.14)$$

et le système d'équations (4.11) — qui reste encore équivalent au système ($\tilde{\mathcal{S}}$) — donne :

$$M_0^* = \frac{\partial K}{\partial H_0}, \quad N_0^* = - \frac{\partial K}{\partial \Psi_0}. \quad (4.15)$$

Ce choix est donc compatible avec la condition (4.12).

D'autre part, si l'on choisit les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ de telle sorte que :

$$N_0^* = 0 \quad (4.16)$$

en tous les points de chaque domaine (Δ_i^*), c'est-à-dire si :

$$N_0 = 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}), \quad (4.16')$$

alors les relations (4.13) et (4.15) montrent qu'on a :

$$K = K(H_0), \quad M_0^* = \frac{dK}{dH_0}, \quad J = \frac{\partial L}{\partial \Psi_0} \frac{dK}{dH_0} \equiv 1, \quad (4.17)$$

en tous les points de chaque domaine (Δ_i^*). Il en résulte que les fonctions Ψ et H sont données par les relations suivantes :

$$\Psi = A(H_0) \Psi_0 + B(H_0), \quad H = K(H_0), \quad (4.18)$$

où

$$A(H_0) \frac{dK}{dH_0} \equiv 1; \quad (4.19)$$

si les conditions précisées précédemment sont remplies, alors les relations (4.18) et (4.19) définissent une classe de solutions «formelles» du système «réduit» (§). On vérifie aisément que, réciproquement, lorsque (Ψ, H) est une solution «formelle» du système «réduit» (§) appartenant à la classe définie par les relations (4.18) et (4.19), alors la condition (4.13) est remplie — où $C_0 = 1$ — et les fonctions Ψ_0, H_0 doivent vérifier le système suivant :

$$\left. \begin{aligned} (A) N_0 &\equiv \text{rot} (\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0) \cdot \text{grad } H_0 = 0, \\ (B^*) M_0 &\equiv \text{rot} (\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0) \cdot \text{grad } \Psi_0 = \frac{dK}{dH_0}. \end{aligned} \right\} (\Sigma)$$

On observe que les premiers membres de ces équations ont les mêmes expressions analytiques que les premiers membres des équations correspondantes du système «réduit» (§).

On dira que (Ψ_0, H_0) forment une classe de solutions «génératrices» du système «réduit» (§) si, dans certaines conditions, elles conduisent à la construction d'une classe de solutions «formelles» de (§); (Σ) sera nommé le système «associé» au système «réduit» (§). On a trouvé précédemment une telle classe de solutions «génératrices» et le résultat obtenu peut être formulé de la manière suivante :

THÉOREME XIII. *Si les conditions (4.13) et (4.16) sont satisfaites, (Ψ_0, H_0) forment une classe de solutions «génératrices» du système «réduit» (§) lorsqu'elles vérifient également l'équation :*

$$M_0 = \frac{dK}{dH_0}, \quad (4.17')$$

et seulement dans ce cas; cette classe de solutions «génératrices» (Ψ_0, H_0) conduit nécessairement à la classe de solutions «formelles» (Ψ, H) du système «réduit» (§), qui est définie par les relations (4.18) et (4.19).

Réciproquement, si (Ψ, H) est la classe de solutions «formelles» du système «réduit» (§), qui est définie par les relations (4.18) et (4.19), alors les conditions (4.13), (4.16) et (4.17') doivent être remplies.

On s'aperçoit que, dans ce cas, on a :

$$\vec{v} = \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H = \text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0, \quad (4.20)$$

puisque $J \equiv 1$ en vertu de la condition (4.13).

Si l'on remplace la condition (4.16) par la condition analogue :

$$M_0 = 0 \quad (4.16'')$$

— dans chaque domaine (Δ^*) —, alors les fonctions Ψ_0 et H_0 s'échangent dans les relations antérieures et on obtient le même type de résultats ; par suite, le rôle différent, joué dans ces relations par les fonctions Ψ_0 et H_0 , s'explique seulement par le choix fait et par la notation utilisée.

En général, le système «associé» (Σ) donne deux équations pour les trois fonctions inconnues $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, $H_0(x_1, x_2, x_3)$ et $K(H_0)$;

pour déterminer ce problème on peut donner soit l'expression analytique de la fonction $K(H_0)$, soit l'expression analytique d'une des fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$. La première possibilité est difficilement utilisable du point de vue pratique, car $K(H_0)$ représente la dépendance de l'énergie totale par rapport à la fonction H_0 , qui ne peut être connue ni par calcul, ni comme résultat de l'expérience ; les développements ultérieurs expliqueront davantage cet aspect du problème. Dans l'autre cas, lorsqu'on donne, par exemple, l'expression analytique de la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, l'équation (Σ, A) devient une équation aux dérivées partielles du second ordre, à coefficients connus, qui peut déterminer la fonction inconnue $H_0(x_1, x_2, x_3)$, dès qu'on lui attache un problème aux limites bien posé ; ensuite, (Σ, B^*) donne l'expression analytique de la fonction $K(H_0)$, à condition que les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ ainsi trouvées ramènent M_0^* à une fonction ne dépendant de x_1, x_2, x_3 , que par l'intermédiaire de H_0 .

Mais, comme l'on verra plus loin, il y a des classes de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) qui réduisent l'équation (Σ, A) à une identité ; dans ce cas, il ne reste qu'une seule équation pour les deux fonctions inconnues $H_0(x_1, x_2, x_3)$, $K(H_0)$ et on doit considérer $K(H_0)$ — ou $H_0(x_1, x_2, x_3)$ — comme fonction arbitraire. C'est le cas, par exemple, des écoulements plans et des écoulements à symétrie axiale et son étude constituera la plus grande partie des développements ultérieurs.

L'autre fonction arbitraire — $B(H_0)$ —, qui intervient dans l'expression (4.18) de la fonction Ψ , peut rester une fonction non déterminée en tenant compte du degré de détermination de la fonction de courant (voir Ch. II, § 3).

On a vu précédemment qu'à une classe de solutions « formelles » (Ψ_0, H_0) du système « associé » (Σ) on a fait correspondre une classe de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » (§).

Mais la réciproque n'est pas vraie, car cette classe de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) dépend de la condition (4.13), donc du choix de l'expression analytique de la fonction J ; en gardant encore la condition (4.16), on trouvera une nouvelle forme de l'équation (B^*) pour une autre expression analytique de J . Puisque la condition (4.13) — ou des conditions similaires — concerne les fonctions $L(\Psi_0, H_0)$, $K(\Psi_0, H_0)$ et non les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, $H_0(x_1, x_2, x_3)$, on va chercher des conditions suffisantes ne concernant que les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, $H_0(x_1, x_2, x_3)$, permettant d'établir une correspondance biunivoque entre le système « réduit » (§) et un système « associé » (Σ) .

Soit $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ deux fonctions définies et de classe C^2 dans le domaine $(\mathcal{D})$ de l'écoulement envisagé ; supposons que ces fonctions peuvent être considérées comme deux « paramètres », qui déterminent la famille de lignes de courant de cet écoulement. Dans ce cas, on a :

$$\frac{D(t, \Psi_0, H_0)}{D(x_1, x_2, x_3)} \neq 0 \text{ — partout dans } (\mathcal{D}) \text{ — ,}$$

$t = t(x_1, x_2, x_3)$ étant la fonction « temps »³²⁾ ou tout autre paramètre définissant la position d'une particule fluide sur les lignes de courant ; le système de coordonnées curvilignes T_p^* est donc défini dès qu'on a précisé la fonction $t(x_1, x_2, x_3)$ qui s'attache aux fonctions données Ψ_0, H_0 .

Les relations (4.9) donnent les expressions M_0, N_0, V_0 construites à l'aide des fonctions Ψ_0 et H_0 ; en général, ces expressions sont des fonctions de $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$, dans le système de coordonnées curvilignes introduit.

En vertu des Théorèmes IV et IX, ces fonctions sont « les mêmes » sur chaque surface de la famille $t(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$ si :

α) chacune des fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction « strictement indépendante » par rapport à la fonction $t(x_1, x_2, x_3)$;

β) la fonction considérée (M_0, N_0 , ou V_0) est aussi une fonction « strictement indépendante » par rapport à $t(x_1, x_2, x_3)$.

Remarquons que la première condition est équivalente à la suivante :

$$\vec{v}_0 \cdot \vec{\omega}_0 \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}), \quad (4.21)$$

où

$$\vec{v}_0 = \text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0, \quad \vec{\omega}_0 = \text{rot } \vec{v}_0. \quad (4.21')$$

Maintenant, supposons que les conditions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad N_0^* &= 0, \\ (b) \quad \frac{\partial M_0^*}{\partial \Psi_0} &\equiv 0, \quad \frac{\partial V_0^*}{\partial \Psi_0} \equiv 0, \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{T}^*)$$

sont remplies, dans chaque domaine (Δ^*) , pour la fonction $t(x_1, x_2, x_3)$ choisie. La condition $(\mathcal{T}^*, a)$ implique $N_0 = 0$ dans $(\mathcal{D})$; par suite, elle ne concerne que les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$. Le rôle de cette condition est le même que dans le cas précédent — voir la condition (4.16') — ; soit elle constitue une équation pour la classe de fonctions (Ψ_0, H_0) envisagée, soit elle est vérifiée identiquement par cette classe de fonctions.

Les conditions $(\mathcal{T}^*, b)$ concernent également les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$, mais elles dépendent aussi de la fonction $t(x_1, x_2, x_3)$ choisie, lorsque les conditions précédentes α) et β) ne sont pas remplies.

Si $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction « strictement indépendante » par rapport à chacune des fonctions $H_0(x_1, x_2, x_3)$, $t(x_1, x_2, x_3)$, alors les conditions $(\mathcal{T}^*, b)$ imposent que les fonctions M_0 et respectivement V_0 soient également des fonctions « strictement indépendantes » par rapport à $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$; dans ce cas, les conditions $(\mathcal{T}^*)$ peuvent encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad N_0 &= 0 \\ (b) \quad \text{grad } M_0 \cdot \text{grad } \Psi_0 &\equiv 0, \quad \text{grad } V_0 \cdot \text{grad } \Psi_0 \equiv 0, \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{T})$$

et elles ne concernent que les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$.

³²⁾ On suppose également que $t(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction définie et de classe C^2 dans le domaine $(\mathcal{D})$.

En tout cas, la classe de fonctions (Ψ_0, H_0) définie par les conditions (6*) constitue une classe de solutions « génératrices » du système « réduit » (§) si elle vérifie le système d'équations (4.11), et seulement dans ce cas ; en ajoutant cette condition, la relation de compatibilité (4.12) donne la condition suivante :

$$\frac{\partial J}{\partial \Psi_0} \left(M_0^* - V_0^* \frac{\partial V_0^*}{\partial H_0} \right) \equiv 0,$$

c'est-à-dire, soit :

$$\frac{\partial J}{\partial \Psi_0} \equiv 0, \quad (4.22)$$

soit :

$$M_0^* - V_0^* \frac{\partial V_0^*}{\partial H_0} \equiv 0. \quad (4.22')$$

Dans le premier cas, la deuxième équation (4.11) donne :

$$\frac{\partial K}{\partial \Psi_0} \equiv 0$$

et l'on a :

$$K = K(H_0), \quad J = J(H_0) = \frac{\partial L}{\partial \Psi_0} \frac{dK}{dH_0}; \quad (4.23)$$

la première équation du système (4.11) donne :

$$M_0^* = \frac{1}{J^2} \frac{dK}{dH_0} - \frac{1}{J} \frac{dJ}{dH_0} V_0^{*2} \quad (4.24)$$

et on obtient donc les expressions suivantes des fonctions

$\Psi = L(\Psi_0, H_0), \quad H = K(\Psi_0, H_0) :$

$$\Psi = A_1(H_0) \Psi_0 + B_1(H_0), \quad H = K(H_0), \quad (4.25)$$

où :

$$A_1(H_0) \frac{dK}{dH_0} = J(H_0). \quad (4.26)$$

Si l'on considère la possibilité (4.22'), alors le système d'équations (4.11) devient :

$$\frac{\partial}{\partial H_0} \left(\frac{1}{2} J^2 V_0^{*2} \right) = \frac{\partial K}{\partial H_0}, \quad \frac{\partial}{\partial \Psi_0} \left(\frac{1}{2} J^2 V_0^{*2} \right) = \frac{\partial K}{\partial \Psi_0}$$

et il en résulte :

$$K = \frac{1}{2} J^2 V_0^{*2} + K_1(t),$$

d'où l'on déduit, en vertu des hypothèses faites précédemment, les relations suivantes :

$$\frac{1}{2} J^2 \frac{\partial}{\partial t} (V_0^{*2}) + \frac{dK_1}{dt} \equiv 0,$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \Psi_0} \left(\frac{1}{2} J^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} (V_0^{*2}) \equiv 0.$$

Dans ce cas, soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (V_0^{*2}) \equiv 0,$$

et on a alors le cas banal des écoulements dont le module de la vitesse est constant le long de chaque ligne de courant ; soit $\frac{\partial}{\partial t} (V_0^{*2}) \neq 0$ partout (sauf en quelques points ou sur quelques lignes ou surfaces particulières, éventuellement) et alors on a :

$$\frac{\partial J}{\partial \Psi_0} \equiv 0,$$

en retrouvant ainsi le cas précédent. Donc, en excluant le cas banal mis en évidence antérieurement, il reste à considérer la possibilité (4.22) comme la seule valable.

La classe de solutions « formelles » du système « réduit » (§) ainsi obtenue dépend donc de trois fonctions arbitraires de H_0 ; mais, comme dans le cas précédent, la fonction $B_1(H_0)$ peut rester non déterminée, car elle n'intervient pas dans les expressions des éléments mécaniques du problème.

On peut établir une liaison entre les deux classes de solutions « formelles » du système « réduit » (§) construites dans ce paragraphe, c'est-à-dire entre la classe définie par les relations (4.18), (4.19) et celle définie par les relations (4.25), (4.26). Dans ce but, si l'on désigne par $\tilde{H}_0 = \tilde{H}_0(H_0)$ la fonction définie par la relation suivante :

$$\frac{d\tilde{H}_0}{dH_0} = J(H_0), \quad (4.27)$$

on a :

$$\vec{v} = \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H = J(H_0) \text{ grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0 = \text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } \tilde{H}_0,$$

et il en résulte les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 (a) \quad \text{rot} (\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } \tilde{H}_0) &= \frac{d\tilde{H}_0}{dH_0} \text{rot} (\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0) + \\
 &+ \frac{d^2\tilde{H}_0}{dH_0^2} \text{grad } H_0 \wedge (\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0), \\
 (b) \quad \text{rot} (\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } \tilde{H}_0) \cdot \text{grad } \tilde{H}_0 &= \\
 &= \left(\frac{d\tilde{H}_0}{dH_0} \right)^2 \text{rot} (\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0) \cdot \text{grad } H_0, \\
 (c) \quad \text{rot} (\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } \tilde{H}_0) \cdot \text{grad } \Psi_0 &= \\
 &= \frac{d\tilde{H}_0}{dH_0} \text{rot} (\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0) \cdot \text{grad } \Psi_0 + \\
 &+ \frac{d^2\tilde{H}_0}{dH_0^2} |\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0|^2.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Si les fonctions Ψ_0 et H_0 satisfont aux conditions $(\mathfrak{C}^*)$ et (4.24) alors, en vertu des relations (4.28, b) et (4.28, c), les fonctions Ψ_0 et $\tilde{H}_0$ doivent satisfaire aux équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 (a) \quad \tilde{N}_0 &\equiv \text{rot} (\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } \tilde{H}_0) \cdot \text{grad } \tilde{H}_0 = 0, \\
 (b) \quad \tilde{M}_0 &\equiv \text{rot} (\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } \tilde{H}_0) \cdot \text{grad } \Psi_0 = \\
 &= \frac{d\tilde{H}_0}{dH_0} M_0 + \frac{d^2\tilde{H}_0}{dH_0^2} V_0^2 = J \left(\frac{1}{J^2} \frac{dK}{dH_0} - \frac{1}{J} \frac{dJ}{dH_0} V_0^2 \right) + \\
 &+ \frac{dJ}{dH_0} V_0^2 = \frac{1}{J} \frac{dK}{dH_0} = \frac{d\tilde{K}}{d\tilde{H}_0},
 \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

où :

$$\tilde{K} = K[H_0(\tilde{H}_0)] = \tilde{K}(\tilde{H}_0).$$

Un calcul simple montre que, réciproquement, si les fonctions Ψ_0 , $\tilde{H}_0$ vérifient les équations (4.29), alors les fonctions Ψ_0 , $H_0(\tilde{H}_0)$, où :

$$\frac{dH_0}{d\tilde{H}_0} = \frac{1}{\tilde{J}(\tilde{H}_0)}, \quad (4.27')$$

vérifient les équations $(\mathfrak{C}, a)$ et (4.24), pour toute valeur de la fonction arbitraire :

$$\tilde{J}(\tilde{H}_0) = J[H_0(\tilde{H}_0)].$$

Les fonctions $\Psi_0, \tilde{H}_0$ vérifient donc un système d'équations du type (Σ) ; la condition (4.26) peut encore s'écrire de la façon suivante :

$$\tilde{A}_1(\tilde{H}_0) \frac{d\tilde{K}}{d\tilde{H}_0} \equiv 1^{33)} \quad (4.26')$$

en retrouvant ainsi la condition (4.19).

Enfin, on vérifie facilement que les fonctions $\Psi_0, \tilde{H}_0$ satisfont aux conditions $(\mathfrak{T}^*)$ lorsque les fonctions Ψ_0, H_0 satisfont à ces conditions et, aussi, que la réciproque de cette propriété est vraie.

On a donc répondu aux deux questions formulées précédemment.

Premièrement, en remplaçant la condition (4.13) — qui concerne les fonctions $L(\Psi_0, H_0)$ et $K(\Psi_0, H_0)$ — par les conditions $(\mathfrak{T}^*)$ — qui concernent les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ — on a établi une correspondance biunivoque entre les classes correspondantes de solutions « formelles » des systèmes d'équations $(\mathfrak{S})$ et (Σ) . A chaque classe de solutions « formelles » $(\Psi_0, \tilde{H}_0)$ du système d'équations (Σ) , qui est définie par la condition :

$$\frac{\partial V_0^*}{\partial \Psi_0} \equiv 0, \quad (4.30)$$

correspond une classe de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » $(\mathfrak{S})$, qui est définie nécessairement par les relations (4.18) et (4.19); réciproquement, à la classe de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » $(\mathfrak{S})$, qui est définie par les relations (4.18) et (4.19), correspond la classe de solutions « formelles » du système (Σ) , qui satisfait en même temps à (4.30).

Donc, dans ce cas, une classe de solutions « génératrices » $(\Psi_0, \tilde{H}_0)$ du système « réduit » $(\mathfrak{S})$ est caractérisée par le système d'équations (Σ) et par la condition (4.30); on dira que (Σ) est le « système associé au système réduit $(\mathfrak{S})$ par rapport aux conditions $(\mathfrak{T}^*)$ ».

Pour définir la classe de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) et pour établir une correspondance biunivoque entre les deux classes de solutions « formelles » des systèmes $(\mathfrak{S})$ et (Σ) , les conditions $(\mathfrak{T}^*)$ ont été suffisantes, mais elles ne sont pas nécessaires; en principe, on peut construire d'autres classes de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) du système « réduit » $(\mathfrak{S})$ en remplaçant les conditions $(\mathfrak{T}^*)$ par d'autres systèmes similaires de « conditions suffisantes ». Cette méthode s'explique aisément, si l'on se rappelle que le système « réduit » $(\mathfrak{S})$ a été considéré comme « système de conditions nécessaires », auxquelles doit satisfaire toute paire de fonctions (Ψ, H) définissant un écoulement de classe (C_i) ; le système d'équations (4.11) a le même caractère, parce qu'il est équivalent au système « réduit » $(\mathfrak{S})$.

Par conséquent, chaque fois qu'on attache au système d'équations (4.11) un système cohérent de « conditions suffisantes », on définit une classe de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) du système « réduit » $(\mathfrak{S})$; on définit ainsi une sous classe de la classe d'écoulements (C_i) .

³³⁾ On a noté : $\tilde{A}_1(\tilde{H}_0) \equiv A_1[H_0(\tilde{H}_0)]$.

On observe que, dans le cadre défini par les conditions $(\mathfrak{C}^*)$, on n'a réussi à déterminer que des classes de solutions formelles des deux systèmes d'équations, la correspondance biunivoque mise en évidence étant établie entre ces classes ; le caractère et le nombre des conditions $(\mathfrak{C}^*)$ ne permettent pas de déterminer une seule solution génératrice (Ψ_0, H_0) . Pour déterminer uniquement une telle solution « génératrice », on doit ajouter d'autres conditions, permettant de préciser les fonctions arbitraires restées et de formuler un problème aux limites bien posé. En effet, le système « associé » (Σ) contient une fonction essentiellement arbitraire, qui n'a pas été introduite par la méthode employée ; cette méthode a mis seulement en évidence le degré de détermination du problème envisagé dans le cadre des hypothèses faites.

La deuxième question résolue précédemment a été la liaison et le rapport qui existent entre les classes de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) et $(\Psi_0, \tilde{H}_0)$ construites.

On a vu que la classe de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) , caractérisée par les conditions $(\mathfrak{C}^*)$ et (4.24), conduit à la classe de solutions « génératrices » $(\Psi_0, \tilde{H}_0)$ pour toute valeur de la fonction arbitraire $J(H_0)$; puisque la classe de solutions « génératrices » $(\Psi_0, \tilde{H}_0)$ vérifie aussi les conditions $(\mathfrak{C}^*)$, on peut considérer qu'elle correspond au choix $J \equiv 1$. La fonction $J(H_0)$ n'est pas essentiellement arbitraire pour le problème étudié, car la détermination des fonctions $\Psi_0, \tilde{H}_0$ est suffisante pour connaître les grandeurs physiques cherchées $(\vec{v}, \vec{\omega}, H, p, \text{etc.})$; on peut donc toujours prendre $J \equiv 1$, sans réduire ainsi la généralité des résultats.

La classe de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) peut être utile parfois, lorsqu'on veut construire des exemples de fonctions de ce type ; dans ce cas, il faut ajouter aux conditions $(\mathfrak{C}^*)$ l'équation (4.24), qui est une équation du type :

$$M_0 = \tau(H_0) - V_0^2 \sigma(H_0), \quad (4.31)$$

en désignant par $\tau(H_0)$ et $\sigma(H_0)$ les fonctions suivantes :

$$\tau(H_0) = \frac{1}{J^2(H_0)} \frac{dK}{dH_0}, \quad \sigma(H_0) = \frac{1}{J(H_0)} \frac{dJ}{dH_0}, \quad (4.31')$$

et en remplaçant ainsi les fonctions arbitraires $J(H_0), K(H_0)$ par les fonctions arbitraires $\tau(H_0)$ et $\sigma(H_0)$.

Les principaux résultats obtenus dans ce paragraphe peuvent être formulés de la façon suivante :

THÉOREME XIV. *Si les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ satisfont aux conditions $(\mathfrak{C}^*)$, alors :*

1° *Ces fonctions peuvent constituer une classe de solutions « génératrices » du système « réduit » $(\mathfrak{S})$ lorsqu'elles satisfont aussi à l'équation (4.24) et seulement dans ce cas.*

2° Si la condition précédente est remplie, la seule classe de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » (§), qui peut être ainsi construite, est celle définie par les relations (4.25) et (4.26).

Le nombre de fonctions essentiellement arbitraires, qui y interviennent, dépend du caractère de la condition $(\mathfrak{C}^*, a)$ par rapport à la classe de fonctions (Ψ_0, H_0) choisie.

3° La fonction arbitraire $J(H_0)$ permet toujours de remplacer la classe de fonctions (Ψ_0, H_0) par la classe de fonctions $(\Psi_0, \tilde{H}_0)$, $\tilde{H}_0$ étant la fonction définie par la relation (4.27). La classe de fonctions $(\Psi_0, \tilde{H}_0)$ vérifie aussi les conditions $(\mathfrak{C}^*)$. Elle satisfait au système « associé » (Σ) et elle conduit nécessairement à la classe de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » (§), qui est définie par les relations (4.18) et (4.19).

4° Il y a une correspondance biunivoque entre les classes de solutions « génératrices » $(\Psi_0, \tilde{H}_0)$ — qui vérifient le système « associé » (Σ) et la condition (4.30) — et les classes correspondantes de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » (§) — qui sont définies par les relations (4.18) et (4.19).

5° Pour caractériser et étudier les écoulements de ce type, il suffit de déterminer la classe correspondante de solutions « génératrices » $(\Psi_0, \tilde{H}_0)$.

§ 3. On s'aperçoit que les premiers membres des équations du système « associé » (Σ) ont la même forme analytique que les premiers membres des équations respectives du système « réduit » (§); on peut donc ordonner ces équations, soit suivant les dérivées partielles de la fonction Ψ_0 , soit suivant les dérivées partielles de la fonction H_0 ; l'on retrouve ainsi — pour les fonctions Ψ_0 et H_0 — les formes analytiques des premiers membres des équations (A_Ψ) , (A_H) , (B_Ψ) , (B_H) , données dans le second paragraphe du chapitre précédent.

Si l'on prend, par exemple, l'équation (A) du système (Σ) sous la forme (A_Ψ) , on voit aisément qu'elle est identiquement vérifiée par les fonctions :

$$\Psi_0 = x_3, H_0 = H_0(x_1, x_2), \quad (4.32)$$

pour toute fonction $H_0(x_1, x_2)$.

Naturellement, la variable x_3 ne joue pas ici un rôle particulier, le choix (4.32) étant équivalent aux conditions :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \Psi_0 &\equiv a_0 x_1 + b_0 x_2 + c_0 x_3, (a_0, b_0, c_0, \text{ constantes}) \\ (b) \quad \text{grad } \Psi_0 \cdot \text{grad } H_0 &\equiv 0, \text{ dans } (\mathcal{D}), \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

car on peut toujours choisir le système cartésien de coordonnées T_x de telle manière que la famille de plans parallèles :

$$\Psi_0 \equiv a_0 x_1 + b_0 x_2 + c_0 x_3 = \text{const.}$$

devienne la famille de plans parallèles $\Psi_0 \equiv x_i = \text{const.}$, (où $i = 1, 2$ ou 3); dans ce cas, les conditions (4.33) prennent la forme (4.32), qui sera retenue pour simplifier les calculs.

Les conditions (4.33) montrent que :

a) Le « paramètre » Ψ_0 est une fonction linéaire par rapport aux variables cartésiennes orthogonales x_i ($i = 1, 2, 3$);

b) les « paramètres » Ψ_0 et H_0 varient « d'une manière strictement indépendante » par rapport aux variables cartésiennes orthogonales x_i ($i = 1, 2, 3$) dans le domaine ($\mathcal{D}$) de l'écoulement.

Par conséquent, la condition ($\mathfrak{C}^*$, a) est identiquement vérifiée par la classe de fonctions (Ψ_0, H_0)³⁴ ainsi définie.

En vertu du Théorème XIV, une telle paire de fonctions forme une solution « génératrice » du système « réduit » ($\mathfrak{S}$), lorsqu'elle vérifie également l'équation (B^*) du système « associé » (Σ) et la condition (4.30); la condition (4.30) est vérifiée de façon identique, dans ce cas, car on a :

$$V_0 = |\text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0| = |\text{grad } H_0|.$$

La forme (B_T) de l'équation (B^*) donne aisément l'équation suivante :

$$\Delta H_0 = \frac{dK}{dH_0}, \quad (4.34)$$

à laquelle doivent satisfaire les fonctions $H_0(x_1, x_2)$ et $K(H_0)$.

On s'aperçoit que toutes les conditions ($\mathfrak{C}^*$) sont ainsi satisfaites pour n'importe quel choix du « paramètre » t , tel que : $t = t(x_1, x_2)$; les conditions ($\mathfrak{C}^*$) prennent la forme ($\mathfrak{C}$) dans ce cas.

En vertu des résultats précédents, les fonctions :

$$\Psi = A(H_0)x_3 + B(H_0), \quad H = K(H_0), \quad (4.35)$$

vérifient le système « réduit » ($\mathfrak{S}$), lorsque la condition (4.34) est satisfaite; les fonctions $A(H_0)$ et $K(H_0)$ sont liées par la relations (4.19) et la fonction $B(H_0)$ reste indéterminée.

Pour trouver les propriétés caractéristiques des écoulements, qui correspondent à cette classe de solutions « formelles » du système « réduit » ($\mathfrak{S}$), on revient au système d'équations (Π_1) en l'écrivant sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \vec{v} &= \text{grad } \Phi - \Lambda \text{grad } H = \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H = \text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0 \\ (b) \quad \vec{\omega} \cdot \text{grad } \Psi &= 1, \\ (c) \quad p &= H - \frac{1}{2} V^2 - Q; \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

ici on a tenu compte aussi de (4.20). Les relations (4.36, a) donnent les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} U_{x_1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \Lambda \frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \Lambda \frac{dK}{dH_0} \frac{\partial H_0}{\partial x_1} = - \frac{\partial H_0}{\partial x_2}, \\ U_{x_2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \Lambda \frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \Lambda \frac{dK}{dH_0} \frac{\partial H_0}{\partial x_2} = \frac{\partial H_0}{\partial x_1}, \\ U_{x_3} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

³⁴) Dans tous les développements suivants on utilisera seulement la classe de solutions « génératrices » ($\Psi_0, \tilde{H}_0$) définie précédemment; on emploiera donc partout la notation H_0 (au lieu de $\tilde{H}_0$) pour simplifier l'écriture, la possibilité de confusion étant exclue.

pour les composantes U_{x_i} ($i = 1, 2, 3$) de la vitesse $\vec{v}$; il en résulte :

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2), \Lambda = \frac{\text{grad } \Phi \cdot \text{grad } H}{|\text{grad } H|^2} = \Lambda(x_1, x_2).$$

Les composantes $\omega_{x_1}, \omega_{x_2}, \omega_{x_3}$ du tourbillon $\vec{\omega}$ sont données, en vertu des relations (4.37), par les expressions suivantes :

$$\omega_{x_1} = 0, \omega_{x_2} = 0, \omega_{x_3} = \Delta H_0 \quad (4.38)$$

et, en tenant compte de l'équation (4.36, b), on a :

$$\omega_{x_3} = \Delta H_0 = \frac{dK}{dH_0} = \omega_{x_3}(H_0) = \omega_{x_3}(x_1, x_2). \quad (4.39)$$

En conclusion, la classe de solutions «génératrices» (Ψ_0, H_0) définie par les relations (4.32) et (4.34) a conduit à la construction d'une classe d'écoulements, qui est caractérisée par les propriétés suivantes :

1° Les lignes de courant sont des courbes, qui se trouvent placées dans les plans parallèles $x_3 = \text{const.}$

2° Les éléments caractéristiques de ces écoulements (la vitesse $\vec{v}$, le tourbillon $\vec{\omega}$, la pression p , l'énergie totale H , etc.) dépendent seulement de x_1 et x_2 ; par suite, chaque écoulement de cette classe est «le même» en tout plan $x_3 = \text{const.}$

3° En chaque point M du domaine de l'écoulement, le tourbillon $\vec{\omega}$ est orthogonal au plan de l'écoulement ($x_3 = \text{const.}$) qui passe par M et sa composante ω_{x_3} vérifie les conditions (4.39).

On a donc retrouvé le cas classique des écoulements plans, permanents et rotationnels d'un fluide parfait et incompressible.

Réciproquement, si l'on adopte les hypothèses qui définissent cette classe d'écoulements, on retrouve la classe de solutions «génératrices» (Ψ_0, H_0), définie par les relations (4.32) et (4.34) et, par conséquent, la classe de solutions «formelles» (Ψ, H) du système «réduit» (§), définie par les relations (4.35) et (4.19); la correspondance mise en évidence est donc biunivoque.

En effet, si l'on considère cette classe d'écoulements, définie comme d'habitude, l'équation de continuité met en évidence l'existence d'une fonction de x_1 et x_2 — que l'on désigne, par exemple, par H_0 —, telle que :

$$U_{x_1} = -\frac{\partial H_0}{\partial x_2}, \quad U_{x_2} = \frac{\partial H_0}{\partial x_1},$$

d'où on déduit :

$$\vec{v} = \text{grad } x_3 \wedge \text{grad } H_0, \quad \vec{\omega} = \Delta H_0 \text{grad } x_3.$$

On ne peut, à priori, affirmer que les fonctions Ψ et H coïncident avec les fonctions trouvées : x_3 et H_0 ; on a donc les relations suivantes :

$$\vec{v} = \text{grad } \Phi - \Lambda \text{ grad } H = \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H = \text{grad } x_3 \wedge \text{grad } H_0,$$

$$\vec{\omega} = \text{grad } H \wedge \text{grad } \Lambda = \Delta H_0 \text{ grad } x_3.$$

Il en résulte les conditions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) \cdot \text{grad } x_3 \equiv 0, \\ (b) \quad & (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) \cdot \text{grad } H_0 \equiv 0, \\ (c) \quad & \text{grad } H \cdot \text{grad } x_3 \equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

La dernière condition (4.40) donne :

$$H = H(x_1, x_2); \quad (4.41)$$

la condition (4.40, b) est satisfaite dans l'un des cas suivants :

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ. \quad & H \equiv H(H_0), \\ 2^\circ. \quad & \Psi \equiv \Psi(H_0), \\ 3^\circ. \quad & \Psi \equiv \Psi(H), \\ 4^\circ. \quad & \Psi \equiv \Psi(H, H_0), \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

et la condition (4.40, a) est satisfaite dans l'un des cas suivants :

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ. \quad & \Psi \equiv \Psi(x_3), \\ 2^\circ. \quad & H \equiv H(x_3), \\ 3^\circ. \quad & \Psi \equiv \Psi(H), \\ 4^\circ. \quad & \Psi \equiv \Psi(H, x_3). \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

On ne peut pas avoir $\Psi \equiv \Psi(H)$, car cette hypothèse implique $\vec{v} \equiv 0$; une analyse simple montre que les conditions (4.40) peuvent être satisfaites seulement dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad & H = H(H_0) = H(x_1, x_2) \quad \text{et} \quad \Psi = \Psi(x_3), \\ 2^\circ. \quad & H = H(H_0) = H(x_1, x_2) \quad \text{et} \quad \Psi = \Psi(H, x_3) = \Psi(H_0, x_3). \end{aligned}$$

La première possibilité et les relations qui donnent la vitesse $\vec{v}$ imposent :

$$\vec{v} = \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H = \frac{d\Psi}{dx_3} \cdot \frac{dH}{dH_0} \text{ grad } x_3 \wedge \text{grad } H_0,$$

et il faut avoir :

$$\frac{d\Psi}{dx_3} \cdot \frac{dH}{dH_0} \equiv 1.$$

Ce cas est donc caractérisé par les expressions suivantes :

$$\Psi = \frac{1}{C_0} x_3, H = C_0 \cdot H_0, \Delta H_0 = C_0, \quad (C_0 \text{ constante}).$$

Pour la deuxième possibilité, on obtient de même façon la condition suivante :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \frac{dH}{dH_0} \equiv 1$$

et il en résulte :

$$\Psi = A(H_0) x_3 + B(H_0), \quad A(H_0) \cdot \frac{dH}{dH_0} \equiv 1;$$

dans ce cas, on a :

$$\Delta H_0 = \frac{dH}{dH_0}$$

et on voit que le premier cas peut être déduit du second, correspondant au cas particulier $H = C_0 H_0$.

On a donc démontré le résultat suivant :

THÉOREME XV. *Les écoulements plans, permanents et rotationnels d'un fluide parfait, incompressible sont caractérisés par la classe de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) du système « réduit » (§), définie par les relations (4.33) et (4.34); la correspondance, qui existe entre ces écoulements et cette classe de solutions « génératrices » du système « réduit » (§), est biunivoque.*

Ce résultat et le Théorème XIV assurent une correspondance similaire entre ces écoulements et la classe de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » (§), définie par les relations (4.35) et (4.19).

§ 4. Dans le cas envisagé précédemment, le système d'équations (II_1) prend la forme équivalente :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \Lambda \frac{dK}{dH_0} \frac{\partial H_0}{\partial x_1} = - \frac{\partial H_0}{\partial x_2}, \\ (b) \quad & \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \Lambda \frac{dK}{dH_0} \frac{\partial H_0}{\partial x_2} = \frac{\partial H_0}{\partial x_1}, \\ (c) \quad & \Delta H_0 = \frac{dK}{dH_0}, \\ (d) \quad & p = K(H_0) - \frac{1}{2} V^2 - Q^{35}), \end{aligned} \right\} \quad (III_1)$$

³⁵⁾ La valeur de V^2 doit être remplacée par son expression en fonction de H_0 :

$$V^2 = |\text{grad } H_0|^2.$$

qui contient quatre équations indépendantes pour les cinq fonctions inconnues : $\Phi(x_1, x_2)$, $H_0(x_1, x_2)$, $\Lambda(x_1, x_2)$, $K(H_0)$ et $p(x_1, x_2)$.

L'une de ces fonctions inconnues reste indéterminée dans le cadre des hypothèses faites ; on peut considérer $K(H_0)$ comme arbitraire. A chaque choix de l'expression analytique de la fonction $K(H_0)$ correspond une autre équation (III₁, c) et, pour le même domaine de l'écoulement, on obtient une autre fonction H_0 ³⁶.

En vertu des relations (4.38), la connaissance de l'expression analytique de la fonction $K(H_0)$ est équivalente à la connaissance de la distribution des tourbillons. Par conséquent, pour déterminer un certain écoulement rotationnel — qui appartient à la classe d'écoulements définie plus haut — les hypothèses faites jusqu'à présent ne sont pas suffisantes ; il faut aussi connaître, par exemple, la distribution des tourbillons par rapport à la famille des lignes de courant. Le cas particulier des écoulements irrotationnels correspond au choix : $K \equiv \text{const.}$

Le système d'équations (III₁) peut être mis sous d'autres formes intéressantes et utiles ; par exemple, si l'on élimine la fonction $\Phi(x_1, x_2)$ en utilisant les deux premières équations de ce système, on obtient :

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} - \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = 1, \quad (4.44)$$

en tenant compte aussi de l'équation (III₁, c).

En éliminant la fonction $\Lambda(x_1, x_2)$ à l'aide des mêmes équations, on a :

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2. \quad (4.45)$$

Enfin, les deux premières équations du système (III₁) donnent aussi la condition suivante :

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \Lambda \frac{dK}{dH_0} \left[\left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2 \right]. \quad (4.46)$$

On a donc les formes équivalentes du système (III₁) :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2, \\ (b) \quad & \frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \Lambda \frac{dK}{dH_0} \left[\left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2 \right], \\ (c) \quad & \Delta H_0 = \frac{dK}{dH_0}, \\ (d) \quad & p = K(H_0) - \frac{1}{2} V^2 - Q, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III}'_1)$$

³⁶) Si l'on précise aussi un certain problème aux limites.

et :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2, \\ (b) \quad & \frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \Lambda \frac{dK}{dH_0} \left[\left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2 \right], \\ (c) \quad & \frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} - \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = 1, \\ (d) \quad & p = K(H_0) - \frac{1}{2} V^2 - Q. \end{aligned} \right\} \quad (III_i'')$$

On considère, par exemple, le système d'équations (III_i') ; si l'on donne l'expression analytique de la fonction $K(H_0)$, alors l'équation (III_i', c) détermine la fonction $H_0(x_1, x_2)$. On voit que la condition de glissement — utilisée habituellement pour formuler un problème aux limites — conduit à un problème du type DIRICHLET pour une équation non linéaire du type :

$$\Delta H_0 = f(H_0), \quad (4.47)$$

dans le domaine de l'écoulement considéré³⁷⁾.

Si l'on a déterminé la fonction H_0 , alors la vitesse $\vec{v}$, le tourbillon $\vec{\omega}$, la pression p et l'énergie totale H sont aussi déterminés dans ce domaine; dans ce cas, l'équation (III_i', a) — qui est une équation linéaire pour les dérivées partielles du premier ordre de la fonction $\Phi(x_1, x_2)$ — détermine la fonction $\Phi(x_1, x_2)$ et l'équation (III_i', b) donne directement l'expression de la fonction $\Lambda(x_1, x_2)$. Par conséquent, toutes les fonctions inconnues sont déterminées facilement; on peut procéder d'une manière analogue avec le système d'équations (III_i'') .

Enfin, les relations (4.44) et (2.25) donnent l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial t}{\partial x_2} - \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial t}{\partial x_1} = 1, \quad (4.48)$$

qui détermine « le temps » t comme fonction de x_1 et x_2 .

On peut considérer que $H_0(x_1, x_2)$ est la fonction arbitraire; dans ce cas, $H_0(x_1, x_2)$ doit satisfaire à une équation du type (4.47). La fonction $K(H_0)$ est déterminée facilement par la relation :

$$K(H_0) = \int f(H_0) dH_0,$$

et les autres fonctions inconnues du système (III_i') se déterminent par le procédé antérieur.

³⁷⁾ On suppose que ce domaine est limité seulement par des parois solides.

On a vu dans le second paragraphe de ce chapitre, qu'on peut remplacer la fonction H_0 par une autre fonction $\tilde{H}_0 = \tilde{H}_0(H_0)$; dans ce cas, la fonction $\tilde{H}_0$ doit satisfaire à une équation du type (4.31), les expressions analytiques des fonctions $\tau(\tilde{H}_0)$ et $\sigma(\tilde{H}_0)$ étant données par les relations (4.31'). On peut aussi construire « une solution » du système (III_i), si l'on donne une fonction $\tilde{H}_0(x_1, x_2)$, qui satisfait (dans le domaine considéré) à une équation du type (4.31), les expressions analytiques des fonctions $\tau(\tilde{H}_0)$ et $\sigma(\tilde{H}_0)$ étant supposées connues.

On va ajouter une dernière observation en ce qui concerne le système d'équations (III_i).

Si l'on met :

$$\Lambda \frac{dK}{dH_0} = -\Lambda^*, \quad H_0 = -H_0^*, \quad \Phi + \Lambda^* H_0 = \Phi^*, \quad (4.49)$$

alors les équations (III_i, a) et (III_i, b) s'écrivent soit sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= \Lambda^* \frac{\partial H_0^*}{\partial x_1} + \frac{\partial H_0^*}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= -\frac{\partial H_0^*}{\partial x_1} + \Lambda^* \frac{\partial H_0^*}{\partial x_2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

soit sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_1} - \frac{\partial H_0^*}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \Lambda^*}{\partial x_1} H_0^*, \\ \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_2} + \frac{\partial H_0^*}{\partial x_1} &= -\frac{\partial \Lambda^*}{\partial x_2} H_0^*. \end{aligned} \right\} \quad (4.50')$$

On introduit la variable complexe $\zeta = x_1 + ix_2$ et l'on considère les fonctions suivantes :

$$F_1(\zeta) = \Phi^* + iH_0^*, \quad (4.51)$$

$$F_2(\zeta) = \Phi + iH_0^*, \quad (4.52)$$

de cette variable complexe.

La fonction $F_1(\zeta)$ est « une fonction pseudoanalytique de première espèce » par rapport au système d'équations (4.50') et la fonction $F_2(\zeta)$ est « une fonction pseudoanalytique de deuxième espèce » par rapport au système d'équations (4.50); ces affirmations se vérifient facilement en tenant compte des résultats cités dans la section B du premier chapitre.

Par analogie avec les écoulements plans et irrotationnels, on dira que la fonction d'une variable complexe :

$$w(\zeta) = U_{x_1} - iU_{x_2} \quad (4.53)$$

est « la vitesse complexe » de l'écoulement; on dira aussi que :

$F_1(\zeta)$ est « le potentiel complexe de première espèce », et

$F_2(\zeta)$ est « le potentiel complexe de deuxième espèce »

des écoulements plans considérés (en vertu de la même analogie).

Des calculs simples donnent :

$$w(\zeta) = U_{x_1} - iU_{x_2} = \frac{\partial H_0^*}{\partial x_2} + i \frac{\partial H_0^*}{\partial x_1}, \quad (4.54)$$

et :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_1}{d\zeta} &= w(\zeta) - \frac{H_0^*}{2} \left(\frac{\partial \Lambda^*}{\partial x_1} - i \frac{\partial \Lambda^*}{\partial x_2} \right), \\ \frac{dF_2}{d\zeta} &= \left(1 - \frac{i}{2} \Lambda^* \right) w(\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

Le système d'équations (4.50') montre que le « potentiel complexe de première espèce » $F_1(\zeta)$ est une fonction analytique de ζ dans une certaine région du domaine considéré ($\mathcal{D}$) si, et seulement si :

$$\Lambda^* \equiv \text{const.} \quad (4.56)$$

dans cette région ; en vertu des notations (4.49), cette condition est équivalente à la suivante :

$$\Lambda \equiv \Lambda(H_0) \equiv \Lambda[H_0(H)] \equiv \tilde{\Lambda}(H), \quad (4.56')$$

dans la même région de ($\mathcal{D}$), et il en résulte :

$$\vec{\omega} = \text{grad } \Lambda \wedge \text{grad } H \equiv 0$$

dans cette région de ($\mathcal{D}$). On a, dans ce cas :

$$\frac{dF_1}{d\zeta} = w(\zeta), \quad \frac{dF_2}{d\zeta} = c_0 w(\zeta), \quad (4.55')$$

où $c_0 = 1 - \frac{i}{2} \Lambda^*$ est une constante complexe ; si l'on prend $\Lambda^* \equiv 0$ (done $\Lambda \equiv 0$) dans cette région de ($\mathcal{D}$), alors on a $F_1(\zeta) \equiv F_2(\zeta)$.

Le résultat suivant a donc été démontré :

THÉORÈME XVI. *A chaque écoulement plan et de classe (C_1) on peut attacher deux potentiels complexes $F_1(\zeta)$, $F_2(\zeta)$ et une vitesse complexe $w(\zeta)$, ($\zeta = x_1 + ix_2$), qui sont définis par les relations (4.51), (4.52) et respectivement (4.54).*

Dans la région du domaine considéré ($\mathcal{D}$) où l'écoulement envisagé est rotationnel, $F_1(\zeta)$ est une fonction pseudoanalytique de première espèce par rapport au système d'équations (4.50'), $F_2(\zeta)$ est une fonction pseudoanalytique de deuxième espèce par rapport au système d'équations (4.50) et leurs dérivées du premier ordre $\frac{dF_1}{d\zeta}$, $\frac{dF_2}{d\zeta}$ sont liées à la vitesse complexe $w(\zeta)$ par les relations (4.55).

Dans les régions de $(\mathcal{D})$ où cet écoulement est irrotationnel — et seulement dans ces régions — les deux potentiels complexes sont égaux $F_1(\zeta) \equiv F_2(\zeta) \equiv F(\zeta)$, la fonction $F(\zeta)$ est analytique et sa dérivée $\frac{dF}{d\zeta}$ est égale à la vitesse complexe $w(\zeta)$.

§ 5. Dans le paragraphe précédent (le Théorème XV) on a établi une correspondance biunivoque entre une certaine classe d'écoulements — les écoulements plans et de classe (C_i) — et une certaine classe de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) du système « réduit » (§) — celle qui est définie par les conditions (4.32) et (4.34).

Maintenant, considérons le cas plus général des écoulements de la classe (C_i) qui ont lieu le long d'une famille de surfaces :

$$\Psi_0(x_1, x_2, x_3) = \text{const.} \quad (4.57)$$

et cherchons les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ doit satisfaire pour que ces écoulements soient « les mêmes » sur chaque surface de la famille (4.57); cette voie peut conduire à une généralisation naturelle des classes d'écoulements déjà connues (les écoulements plans ou ceux qui ont une symétrie axiale).

Dans ce but, on va ajouter aux hypothèses (C_i) d'autres conditions, qui seront analogues à celles qui définissent les écoulements plans; on introduit d'abord l'hypothèse suivante :

6° « l'écoulement a lieu le long des surfaces de la famille (4.57) ».

Cette hypothèse s'exprime par la condition suivante :

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \Psi_0 = 0 \quad (4.58)$$

en tous les points du domaine $(\mathcal{D})$ de l'écoulement considéré.

Pour utiliser la condition (4.58), on introduit un système de coordonnées curvilignes $T_q(q_1, q_2, q_3)$, de la même façon qu'au (Ch.I, § 3), en prenant cette fois :

$$q_3 = \Psi_0(x_1, x_2, x_3);$$

en gardant les mêmes notations (Ch. I, § 3), on a aussi, dans ce cas : $u_3 \equiv 0$, $u^3 \equiv 0$, comme une conséquence de la condition (4.58) — exprimée dans le système de coordonnées curvilignes T_q .

L'équation de continuité (I_1, a) s'écrit :

$$\frac{\partial (\sqrt{g} u^1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (\sqrt{g} u^2)}{\partial q_2} = 0,$$

et l'on déduit l'existence d'une fonction — disons $\chi_0(q_1, q_2, q_3)$ — telle que :

$$u^1 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \chi_0}{\partial q_2}, \quad u^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \chi_0}{\partial q_1}. \quad (4.59)$$

En notant :

$$\begin{aligned} \chi_0(q_1, q_2, q_3) &\equiv \chi_0[q_1(x_1, x_2, x_3), q_2(x_1, x_2, x_3), q_3(x_1, x_2, x_3)] \equiv \\ &\equiv H_0(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

— par rapport au changement de coordonnées introduit auparavant —, les relations (4.59) peuvent encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{v} = \text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0. \quad (4.60)$$

On voit facilement que la relation (4.60) représente la condition nécessaire et suffisante, qui doit être remplie pour avoir satisfaites l'hypothèse 6° et l'équation de continuité.

On ajoute aussi l'hypothèse suivante :

7° « En chaque point $M \in \mathcal{D}$, le tourbillon $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$ est orthogonal à la surface de la famille (4.57) qui passe par ce point », c'est-à-dire :

$$\vec{\omega} \wedge \text{grad } \Psi_0 \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}). \quad (4.61)$$

Dans ce cas, on a :

$$\vec{\omega} = \sqrt{g^{33}} \omega_3 \vec{e}^3 = \omega_3 \text{grad } \Psi_0, \quad (4.62)$$

donc :

$$\omega_1 \equiv 0, \quad \omega_2 \equiv 0, \quad \text{dans } (\mathcal{D}), \quad (4.63)$$

$$\omega^1 \equiv 0, \quad \omega^2 \equiv 0, \quad \text{dans } (\mathcal{D}). \quad (4.63')$$

Il en résulte les conditions suivantes :

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_3} \equiv 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial q_3} \equiv 0, \quad \text{dans } (\mathcal{D}); \quad (4.64)$$

les composantes covariantes de la vitesse $\vec{v}$ — dans le système de coordonnées curvilignes T_q introduit — sont donc « les mêmes » sur chaque surface de la famille (4.57); u_1 et u_2 sont des fonctions « strictement indépendantes » par rapport à la fonction Ψ_0 .

On peut vérifier aisément que, dans le cadre des hypothèses (C_i) + 6°, la condition (4.64) et l'hypothèse 7° sont entièrement équivalentes, ayant donc toujours le droit de remplacer l'une par l'autre.

Pour assurer que ces écoulements sont « les mêmes » sur chaque surface de la famille (4.57), il faut ajouter aussi l'hypothèse suivante :

8° « Les éléments, qui caractérisent un tel écoulement, sont les mêmes sur chaque surface de la famille (4.57), c'est-à-dire la vitesse $\vec{v}$, le tourbillon $\vec{\omega}$, la pression p et l'énergie totale H ont les mêmes valeurs le long de chaque courbe de coordonnées $q_3 = \text{variable}$ ». On suppose donc qu'on a :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_3} \equiv 0, \\ (b) \quad & \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial q_3} \equiv 0, \\ (c) \quad & \frac{\partial p}{\partial q_3} \equiv 0, \\ (d) \quad & \frac{\partial H}{\partial q_3} \equiv 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

en chaque point du domaine $(\mathcal{D})$.

Autrement dit, chacune de ces fonctions de x_1, x_2, x_3 , est supposée une fonction « strictement indépendante » par rapport à la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$.

Les relations établies précédemment et la manière dans laquelle on a choisi le système de coordonnées curvilignes T_q conduisent aux expressions suivantes de ces dérivées partielles :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_3} &= \frac{1}{2} \sqrt{g_{11}} \frac{\partial u^1}{\partial q_3} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \sqrt{g_{22}} \frac{\partial u^2}{\partial q_3} \vec{e}_2 + \\ &\quad + \frac{1}{2 \sqrt{g_{33}}} \left(u^1 \frac{\partial g_{33}}{\partial q_1} + u^2 \frac{\partial g_{33}}{\partial q_2} \right) \vec{e}_3, \\ (b) \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial q_3} &= - \sqrt{g^{11}} \frac{\omega_3}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial q_1} \vec{e}_1 - \sqrt{g^{22}} \frac{\omega_3}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\omega_3}{\sqrt{g_{33}}} \right) \vec{e}_3, \\ (c) \quad \frac{\partial H}{\partial q_3} &= \frac{\partial p}{\partial q_3} + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) + \frac{\partial Q}{\partial q_3}. \end{aligned} \right\} \quad (4.66)$$

Par conséquent, la condition (4.65, a) est remplie si l'on a simultanément :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad &\frac{\partial u^1}{\partial q_3} \equiv 0, \frac{\partial u^2}{\partial q_3} \equiv 0, \\ (b) \quad &\vec{v} \cdot \text{grad } g_{33} \equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{dans } (\mathcal{D}) \quad (4.67)$$

et seulement dans ce cas ; les conditions (4.65, a) et (4.67) sont donc équivalentes. On observe que les conditions (4.67, a) et (4.64) assurent que le module de la vitesse $\vec{v}$ est une fonction « strictement indépendante » par rapport à la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$:

$$\frac{\partial}{\partial q_3} (|\vec{v}|^2) = 2\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_3} = \frac{\partial}{\partial q_3} (u^1 u_1 + u^2 u_2) \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}). \quad (4.68)$$

La condition (4.67, b) implique donc que la direction de la vitesse $\vec{v}$ ne dépend pas de q_3 .

Les conditions (4.64) et (4.67, a) donnent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial q_3} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial q_3} u^1 + \frac{\partial g_{12}}{\partial q_3} u^2 = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial q_3} &= \frac{\partial g_{12}}{\partial q_3} u^1 + \frac{\partial g_{22}}{\partial q_3} u^2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

et il en résulte la condition suivante :

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial q_3} \frac{\partial g_{22}}{\partial q_3} - \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial q_3} \right)^2 \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}), \quad (4.70)$$

qui assure que ce système homogène n'admet pas seulement la solution banale

$$u^1 \equiv 0, \quad u^2 \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}).$$

La condition similaire :

$$\frac{\partial g^{11}}{\partial q_3} \frac{\partial g^{22}}{\partial q_3} - \left(\frac{\partial g^{12}}{\partial q_3} \right)^2 \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}) \quad (4.70')$$

peut être obtenue d'une manière analogue.

La relation (4.66, b) montre que la condition (4.65, b) est remplie soit lorsqu'on a :

$$\omega^3 \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}),$$

c'est-à-dire :

$$\vec{\omega} \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}),$$

soit lorsque les conditions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial q_1} \equiv 0, \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial q_2} \equiv 0, \\ (b) \quad \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\omega_3}{\sqrt{g_{33}}} \right) \equiv 0, \end{array} \right\} \quad \text{dans } (\mathcal{D}) \quad (4.71)$$

sont simultanément satisfaites. Si, dans le domaine $(\mathcal{D})$, on a certaines régions où l'écoulement envisagé est rotationnel et d'autres régions où il est irrotationnel, on utilisera l'une ou l'autre des deux possibilités en fonction du caractère de l'écoulement dans la région considérée. On étudie ici seulement le cas rotationnel et on prend donc les conditions (4.71) comme conditions nécessaires ; ces conditions et celles trouvées précédemment conduisent aux conséquences suivantes.

D'abord, en tenant compte des relations (4.64), la condition (4.71, b) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\omega_3}{\sqrt{g_{33}}} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_3} (\sqrt{g_{33}} \omega^3) = \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial q_1} - \frac{\partial u_1}{\partial q_2} \right) \right] = \\ &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial q_1} - \frac{\partial u_1}{\partial q_2} \right) \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \right) \equiv 0 \end{aligned}$$

et, puisqu'on a supposé $\vec{\omega} \neq 0$, il en résulte la forme équivalente de cette condition :

$$\frac{\partial G}{\partial q_3} = g_{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial q_3} + g_{22} \frac{\partial g_{11}}{\partial q_3} - 2g_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial q_3} \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}). \quad (4.72)$$

Pour satisfaire simultanément aux conditions (4.70) et (4.72), il faut nécessairement avoir :

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial q_3} \equiv 0, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial q_3} \equiv 0, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial q_3} \equiv 0, \quad \text{dans } (\mathcal{D}). \quad (4.73)$$

En effet, considérons les deux cas possibles :

— soit l'on a :

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial q_3} \equiv 0,$$

et alors les relations (4.70) et (4.72) conduisent nécessairement aux conditions (4.73), comme on peut voir facilement ;

— soit l'on a :

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial q_3} \neq 0,$$

et alors on obtient le système d'équations suivant :

$$mn = 1, \quad g_{11}n + g_{22}m - 2g_{12} = 0,$$

en notant :

$$m = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial q_3}}{\frac{\partial g_{12}}{\partial q_3}}, \quad n = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial q_3}}{\frac{\partial g_{12}}{\partial q_3}}.$$

Ce système conduit à l'équation algébrique du second degré :

$$g_{11}n^2 - 2g_{12}n + g_{22} = 0,$$

qui a des racines imaginaires, car on a :

$$g_{12}^2 - g_{11}g_{22} = -G < 0;$$

la deuxième possibilité est donc exclue en conduisant à une conclusion absurde. Par suite, les conditions (4.73) sont nécessaires pour avoir simultanément remplies les conditions (4.70) et (4.72); on voit facilement que, du même point de vue, elles sont suffisantes.

D'autre part, on remarque le fait que les conditions (4.71, a) assurent la vérification de la condition (4.67, b); dans l'ensemble des conditions (4.65) on peut donc remplacer la condition (4.65, a) par les conditions (4.67, a). Il suffit donc de supposer dans (4.65, a) que les composantes contravariantes de la vitesse $\vec{v}$ ne dépendent pas de q_3 . Les conditions (4.71, a) permettent aussi de prendre :

$$g_{33} \equiv 1,$$

sans introduire ainsi une hypothèse supplémentaire ; en effet, on peut faire le changement de variables défini par les relations suivantes :

$$\tilde{q}_1 = q_1, \quad \tilde{q}_2 = q_2, \quad \frac{d\tilde{q}_3}{dq_3} = \sqrt{g_{33}(q_3)},$$

par lequel toutes les grandeurs, qui ne dépendent pas de q_3 , restent « les mêmes ». Pour le coefficient $\tilde{g}_{33} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{q}_3} \right)^2$ on obtient la valeur suivante :

$$\tilde{g}_{33} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \tilde{q}_3} \right)^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \frac{dq_3}{d\tilde{q}_3} \right)^2 = \left(\frac{dq_3}{d\tilde{q}_3} \right)^2 g_{33} = 1;$$

donc, on peut toujours supposer que ce changement de variables a été déjà fait et qu'on a $g_{33} \equiv 1$.

Dans ce cas, on a :

$$g = g_{33} \cdot G = G$$

et les relations (4.59) prennent la forme suivante :

$$u^1 = \frac{-1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \chi_0}{\partial q_2}, \quad u^2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \chi_0}{\partial q_1}. \quad (4.59')$$

Les conditions (4.67, a) et (4.72) donnent :

$$\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial q_1 \partial q_3} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial q_2 \partial q_3} = 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D})$$

et il en résulte :

$$\chi_0 = \chi_0(q_1, q_2, q_3) = \chi'_0(q_1, q_2) + \chi''_0(q_3); \quad (4.74)$$

dans le système de coordonnées cartésiennes T_x , la relation (4.74) s'écrit :

$$H_0 = H'_0(x_1, x_2, x_3) + H''_0(\Psi_0), \quad (4.74')$$

où la fonction $H'_0(x_1, x_2, x_3)$ doit satisfaire à la condition suivante :

$$\text{grad } H'_0 \cdot \text{grad } \Psi_0 \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}). \quad (4.75)$$

En vertu du Théorème IV, $H'_0(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction « strictement indépendante » par rapport à la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$.

La fonction $H''_0(\Psi_0)$ peut rester arbitraire car, à cause de la représentation (4.60) du champ de la vitesse $\vec{v}$, elle n'intervient pas dans les expressions des éléments mécaniques du problème ; on va prendre donc $H_0 = H'_0$, sans réduire ainsi la généralité des résultats pour le problème de mécanique qui est envisagé ici.

On a donc, dans le cadre des hypothèses précisées précédemment la représentation suivante :

$$\vec{v} = \text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0, \quad (4.60')$$

où

$$\text{grad } \Psi_0 \cdot \text{grad } H_0 = 0 \quad (4.75')$$

en chaque point du domaine considéré ($\mathcal{D}$) ; les « paramètres » $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, $H_0(x_1, x_2, x_3)$, qui déterminent la famille de lignes de courant, varient « d'une manière strictement indépendante » par rapport aux variables d'espace x_1, x_2, x_3 .

En vertu des conditions (4.60') et (4.62), on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{\omega} = 0, \quad (4.76)$$

en tout point $M \in \mathcal{D}$; il est bien connu que tout champ vectoriel, qui remplit cette dernière condition, peut être représenté de la manière suivante :

$$\vec{v} = \sigma \operatorname{grad} \tau, \quad (4.77)$$

à l'aide de deux fonctions $\sigma = \sigma(x_1, x_2, x_3)$ et $\tau = \tau(x_1, x_2, x_3)$.

En prenant cette représentation pour le champ de la vitesse $\vec{v}$, les relations (4.60') et (4.77) donnent :

$$\operatorname{grad} \tau \cdot \operatorname{grad} \Psi_0 = 0 \text{ et } \operatorname{grad} \tau \cdot \operatorname{grad} H_0 = 0, \quad (4.78)$$

en chaque point $M \in \mathcal{D}$.

Par conséquent, en vertu des conditions (4.75') et (4.78), les trois « paramètres » Ψ_0 , H_0 et τ déterminant la classe d'écoulements envisagée varient « d'une manière strictement indépendante », deux par deux, et la famille de surfaces (4.57) doit appartenir à un système triple orthogonal de familles de surfaces ; on peut donc considérer que le système de coordonnées curvilignes T_a introduit est orthogonal, sans introduire ainsi une nouvelle hypothèse. On prend donc :

$$g^{12} = 0, \quad g_{12} = 0, \quad g = G = g_{11} g_{22} \quad \text{dans } (\mathcal{D}).$$

Enfin, on observe que la condition $g_{33} \equiv 1$ dans ($\mathcal{D}$), qui peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x_3} \right)^2 = 1, \text{ (en chaque point } M \in \mathcal{D}), \quad (4.79)$$

conduit à la forme suivante de la condition (4.71, b) :

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial q_3} = 0 \quad \text{(en chaque point } M \in \mathcal{D}). \quad (4.80)$$

Mais, l'on a :

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial q_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_3} = \operatorname{grad} \omega_3 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = \operatorname{grad} \omega_3 \cdot \operatorname{grad} \Psi_0,$$

en tenant compte des conditions trouvées précédemment.

Par suite, la condition (4.80) est équivalente à la suivante :

$$\operatorname{grad} \omega_3 \cdot \operatorname{grad} \Psi_0 = 0 \quad \text{(en chaque point } M \in \mathcal{D}) \quad (4.80')$$

et la relation (4.62) donne :

$$\operatorname{div} \vec{\omega} = \omega_3 \Delta \Psi_0 + \operatorname{grad} \omega_3 \cdot \operatorname{grad} \Psi_0 = \omega_3 \Delta \Psi_0 = 0.$$

Puisqu'on a supposé $\omega_3 \neq 0$ dans $(\mathcal{D})$, il en résulte que la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ doit aussi vérifier l'équation de LAPLACE :

$$\Delta \Psi_0 = 0, \quad \text{en chaque point } M \in \mathcal{D}. \quad (4.81)$$

Les conditions (4.65,c) et (4.65,d) n'introduisent pas d'autres restrictions, car elles ne sont pas indépendantes par rapport aux conditions envisagées précédemment ; en effet, la condition (4.65,d) est une conséquence de l'hypothèse 7° et de la représentation générale (2.14) du tourbillon $\vec{\omega}$, qui donnent :

$$\vec{\omega} = \text{grad } H \wedge \text{grad } \Lambda = \omega_3 \text{grad } \Psi_0.$$

Il en résulte :

$$\text{grad } H \cdot \text{grad } \Psi_0 = 0 \quad (\text{en chaque point } M \in \mathcal{D}),$$

c'est-à-dire $\frac{\partial H}{\partial q_3} = 0$ dans $(\mathcal{D})$, en écrivant cette condition dans le système de coordonnées curvilignes T_q introduit ; dans ce cas, l'énergie totale $H(x_1, x_2, x_3)$ est donc une fonction « strictement indépendante » par rapport à $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$.

Si l'on suppose que le potentiel Q des forces extérieures $\vec{F}$ ne dépend pas de q_3 (c'est une condition physique naturelle pour la classe d'écoulements cherchée), alors l'équation (II. c), la relation (4.68) et la conclusion précédente $\left(\frac{\partial H}{\partial q_3} \equiv 0 \text{ dans } (\mathcal{D})\right)$ assurent que la condition (4.65, c) est également satisfaite ; par suite, dans le cadre des hypothèses précédentes, la pression $p(x_1, x_2, x_3)$ est aussi une fonction « strictement indépendante » par rapport à Ψ_0 .

§ 6. L'analyse détaillée, qui a été faite dans le paragraphe précédent sur les hypothèses physiques 6°, 7° et 8°, permet non seulement de voir les conséquences directes de chacune de ces hypothèses (et aussi de leur ensemble), mais de trouver également les conditions nécessaires et suffisantes, qui assurent la réalisation de ces hypothèses. Par conséquence, en éliminant l'une ou l'autre de ces conditions, on peut construire d'autres classes d'écoulements, plus générales encore que celle envisagée ici.

Revenons un peu sur les conditions précédemment trouvées et prenons d'abord l'hypothèse 6° ; on a vu que cette hypothèse conduit à la représentation (4.60) de la vitesse $\vec{v}$. Mais l'on a déjà montré (Ch. II, § 1, (2.12)) que la vitesse $\vec{v}$ de tout écoulement de classe (C_1) peut toujours avoir une représentation de ce type, les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ de (4.60) étant remplacées, dans le cas général, par la fonction de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et respectivement par l'énergie totale $H(x_1, x_2, x_3)$.

Toutefois, on ne peut pas en déduire que l'hypothèse 6° est toujours satisfaite et qu'on peut prendre $\Psi_0 = \Psi$; la signification physique des fonctions Ψ et H empêche ce choix, lorsqu'on veut ajouter d'autres hypothèses physiques sur le caractère de l'écoulement.

L'exemple des écoulements plans a montré que la famille de surfaces de courant $\Psi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$ n'est pas la famille de plans parallèles $x_3 = \text{const.}$, les fonctions Ψ et Ψ_0 étant différentes dans ce cas.

Par conséquence, l'hypothèse 6° doit être introduite lorsqu'on étudie des problèmes analogues à celui envisagé dans le paragraphe précédent ; cette hypothèse assure l'existence des « paramètres » Ψ_0, H_0 , et, comme dans le cas des écoulements plans (Ch. IV, § 3), on voit facilement qu'il faut avoir : $\Psi = \Psi(\Psi_0, H_0)$, $H = H(\Psi_0, H_0)$. Dans ce genre de problèmes, l'hypothèse 6° assure donc l'existence d'une transformation du type (4.1), sur laquelle se sont basés tous les développements faits dans ce chapitre.

On a déjà vu que les hypothèses physiques 7° et 8° sont vérifiées si, et seulement si, les conditions (4.64), (4.67, a) et (4.71) sont remplies ; elles constituent donc un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes par rapport à ces hypothèses. Mais les développements faits dans le paragraphe précédent permettent également de prendre d'autres ensembles de conditions nécessaires et suffisantes ; on voit, par exemple, qu'on peut prendre l'ensemble des conditions (4.64), (4.73), (4.79) et (4.81), dans ce cas les relations (4.67, a) et (4.71) se déduisant comme conséquences.

En prenant ce dernier ensemble de conditions nécessaires et suffisantes, on observe que les trois dernières conditions — (4.73), (4.79) et (4.81) — concernent la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, c'est-à-dire la famille de surfaces (4.57) le long de laquelle ont lieu les écoulements envisagés. On vérifie facilement qu'une famille de plans parallèles :

$$\Psi_0 \equiv \sum_{i=1}^3 a_i x_i = \text{const.} \quad (\text{où : } a_1, a_2, a_3 \text{ sont des constantes})$$

satisfait à toutes ces conditions et ce cas a été déjà envisagé.

On va montrer que cette solution est en même temps la seule solution possible du problème considéré.

En effet, pour les composantes covariantes du tenseur fondamental :

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}, \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

exprimées dans le système de coordonnées curvilignes T_q introduit, on a trouvé les conditions suivantes :

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial q_3} = 0, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial q_3} = 0, \quad g_{33} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{23} = 0, \quad g_{31} = 0,$$

qui doivent être remplies en chaque point $M \in \mathcal{D}$; on a donc aussi :

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial q_3} = 0, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial q_3} = 0, \quad \frac{\partial g_{23}}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial g_{31}}{\partial q_2} = 0,$$

partout dans $(\mathcal{D})$. Toutes ces conditions peuvent encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial q_3} &\equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_3} = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial q_3} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_2 \partial q_3} = 0, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial q_1} &\equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_3 \partial q_1} = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial q_2} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_2 \partial q_3} = 0, \\
\frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial q_3} &\equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_3^2} = 0, \\
\frac{\partial g_{12}}{\partial q_3} &\equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_2 \partial q_3} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_3} = 0, \quad \frac{\partial g_{23}}{\partial q_1} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_3 \partial q_1} + \\
+ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_2} &= 0, \quad \frac{\partial g_{31}}{\partial q_2} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_2 \partial q_3} = 0.
\end{aligned}$$

Les trois dernières équations donnent :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_2 \partial q_3} = 0, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_3 \partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_2} = 0,$$

partout dans $(\mathcal{D})$. Enfin, si l'on ajoute les conditions évidentes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{13}}{\partial q_3} &\equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_3} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_3^2} = 0, \\
\frac{\partial g_{23}}{\partial q_3} &\equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_3^2} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_2 \partial q_3} = 0,
\end{aligned}$$

on arrive aux conclusions suivantes :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_j \partial q_3} = 0 \quad (\text{pour tout } i, j = 1, 2 \text{ ou } 3),$$

partout dans $(\mathcal{D})$; il en résulte :

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_2 \partial q_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_3^2} = 0, \quad (\text{partout dans } (\mathcal{D})),$$

et, par conséquent, le vecteur $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$ doit avoir la même direction et le même module (constant) en chaque point $M \in \mathcal{D}$.

Puisqu'on a :

$$\text{grad } \Psi_0 \equiv \vec{e}^3 \equiv \vec{e}_3 \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = \vec{a} = \text{const.},$$

dans le cas envisagé, il en résulte :

$$\Psi_0 \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,$$

où a_i ($i = 1, 2, 3$) sont les composantes du vecteur constant $\vec{a}$; on a donc démontré le résultat suivant :

THÉOREME XVII *Les seules familles de surfaces (4.57), le long desquelles on peut avoir des écoulements rotationnels de classe (C_1) , définis par les hypothèses 7° et 8°, sont les familles de plans parallèles.*

Il faut souligner que ce résultat n'est démontré que dans les régions du domaine $(\mathcal{D})$ où l'écoulement considéré est rotationnel, cette condition intervenant de façon essentielle dans les calculs précédents.

On remarque aussi que ce résultat montre que, dans le cadre des hypothèses précisées précédemment, le caractère « plan » de l'écoulement ne doit plus être considéré comme une hypothèse supplémentaire, car il est une conséquence nécessaire des autres hypothèses.

§ 7. Dans le troisième paragraphe de ce chapitre on a retrouvé la classe des écoulements plans en partant de la classe de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) définie par les relations (4.32) et (4.34); on a vu également que cette classe de solutions « génératrices » remplit les conditions imposées par le Théorème XIV et qu'elle caractérise les écoulements plans de classe (C_1) .

La forme analytique particulière des conditions (4.32) a joué un rôle important, en permettant de réduire à une identité l'équation (A) du système « associé » (Σ) ; on pourrait croire que les écoulements plans constituent un cas particulier, qui est favorisé par la méthode utilisée. En effet, il est difficile à voir sur les formes (A_Ψ) et (A_H) de l'équation (A) , d'autres paires particulières de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) , qui la vérifient de façon identique.

Pour mettre mieux en évidence les avantages et la généralité de cette méthode, on écrira les équations (A) et (B^*) du système « associé » (Σ) dans un système quelconque de coordonnées curvilignes $T_0(q_1, q_2, q_3)$; la forme analytique explicite de ces équations, qui est ainsi obtenue, ne sera pas donnée ici, car il est assez compliqué de l'écrire.

En suivant la même méthode, on est conduit à chercher des solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) du système « réduit » $(\mathfrak{S})$, qui satisfont aux conditions imposées par le Théorème XIV et qui ont la forme analytique suivante :

$$\Psi_0 = q_3, H_0 = H_0(q_1, q_2); \quad (4.82)$$

cette forme analytique des fonctions Ψ_0 et H_0 est entièrement équivalente à la condition :

$$\text{grad } \Psi_0 \cdot \text{grad } H_0 \equiv 0, \quad \text{dans } (\mathcal{D}). \quad (4.82')$$

Par conséquent, on envisagera dans ce paragraphe le cas plus général des écoulements de la classe (C_1) , pour lesquels les deux « paramètres » $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$, qui déterminent la famille de lignes de courant, varient « d'une manière strictement indépendante » par rapport aux variables cartésiennes x_1, x_2, x_3 et, en même temps, ils satisfont aux conditions du Théorème XIV. Par rapport au cas « plan », on

garde donc seulement la deuxième des conditions (4.33) et on n'impose plus que la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ soit linéaire.

Pour simplifier les calculs, on peut toujours choisir le système de coordonnées curvilignes T_a de même manière qu'au (Ch. I, § 3); on fera ce choix et on gardera les mêmes notations.

Dans ce cas, pour les fonctions N_0^* , M_0^* , V_0^* , définies par les relations (4.9), on obtient les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (a) \ N_0^* &\equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right) \left(\frac{\partial H_0}{\partial q_1} \right)^2 - 2 \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \right) \frac{\partial H_0}{\partial q_1} \frac{\partial H_0}{\partial q_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \right) \left(\frac{\partial H_0}{\partial q_2} \right)^2 \right], \\ (b) \ M_0^* &\equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial H_0}{\partial q_1} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial H_0}{\partial q_2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial H_0}{\partial q_1} - \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial H_0}{\partial q_2} \right) \right] = \operatorname{div} (g^{33} \operatorname{grad} H_0), \\ (c) \ V_0^{*2} &\equiv \frac{1}{g} \left[g_{11} \left(\frac{\partial H_0}{\partial q_2} \right)^2 - 2g_{12} \frac{\partial H_0}{\partial q_1} \frac{\partial H_0}{\partial q_2} + g_{22} \left(\frac{\partial H_0}{\partial q_1} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.83)$$

Pour pouvoir appliquer les conclusions du Théorème XIV à la classe de fonctions (4.82), il faut d'abord que les expressions (4.83) de N_0^* , M_0^* et V_0^{*2} satisfassent aux conditions $(\mathfrak{C}^*)$; on n'étudiera, dans ce paragraphe, que le cas analogue au cas « plan », c'est-à-dire celui caractérisé par la propriété que la condition $(\mathfrak{C}^*, a)$ est identiquement vérifiée par la classe de fonctions (4.82). Ce cas est défini par les conditions suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \right) \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \right) \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right) \equiv 0, \quad (4.84)$$

qui doivent être remplies simultanément en chaque point $M \in \mathcal{D}$.

Ces conditions et l'expression (4.83, c) de V_0^* montre que la deuxième condition $(\mathfrak{C}^*, b)$ est remplie lorsqu'on a :

$$\frac{\partial g}{\partial q_3} \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}), \quad (4.85)$$

et seulement dans ce cas. L'expression (4.83, b) de M_0^* montre que la première condition $(\mathfrak{C}^*, b)$ est aussi vérifiée, lorsque les conditions (4.84) et (4.85) sont simultanément remplies. On voit facilement que l'ensemble des conditions (4.84) et (4.85) peut être remplacé par l'ensemble équivalent :

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial q_3} \equiv 0, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial q_3} \equiv 0, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial q_3} \equiv 0, \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial q_3} \equiv 0, \quad \text{dans } (\mathcal{D}). \quad (4.86)$$

D'autre part, dans le cas envisagé ici, l'équation (B^*) du système « associé » (Σ) prend la forme suivante :

$$\operatorname{div} [g^{33} \operatorname{grad} H_0] = \frac{dK}{dH_0}, \quad (4.87)$$

et, en tenant compte de la signification de g^{33} , on peut encore l'écrire de la manière suivante :

$$\operatorname{div} [|\operatorname{grad} \Psi_0|^2 \operatorname{grad} H_0] = \frac{dK}{dH_0}. \quad (4.87')$$

Par conséquent, en vertu du Théorème XIV, les fonctions (Ψ_0, H_0) satisfaisant aux conditions (4.82'), (4.86) et (4.87') constituent une classe de solutions « génératrices » du système « réduit » (§) et elles conduisent nécessairement à la classe de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » (§), qui est définie par les relations (4.18) et (4.19).

Pour les écoulements de classe (C_1) , qui correspondent à cette classe de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) , la vitesse $\vec{v}$ a donc l'expression suivante :

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi - \Lambda \frac{dK}{dH_0} \operatorname{grad} H_0 = \operatorname{grad} \Psi_0 \wedge \operatorname{grad} H_0; \quad (4.88)$$

par suite, en vertu d'une remarque faite dans le paragraphe précédent, on peut considérer que ces écoulements ont lieu le long de la famille des surfaces :

$$\Psi_0(x_1, x_2, x_3) = \text{const.} \quad (4.89)$$

Si l'on suppose que cette famille de surfaces est donnée — en généralisant ainsi le cas des écoulements plans —, il reste alors à déterminer seulement la fonction $H_0(x_1, x_2, x_3)$ et on dispose dans ce sens des équations (4.82') et (4.87'); de la même manière que dans le cas des écoulements plans et pour les mêmes raisons, il faut supposer que l'expression analytique de la fonction $K = K(H_0)$ est donnée.

Le choix de cette famille de surfaces est limité par les conditions (4.86); ces conditions ne dépendent pas du choix des coordonnées q_1 et q_2 , qui peut, en général, se faire de plusieurs façons. En effet, supposons que les conditions (4.86) ne sont pas remplies dans le système de coordonnées curvilignes T_q choisi et qu'il y a un autre système de coordonnées T_q^{-38} , lié au premier par les relations :

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_1(q_1, q_2), \quad \bar{q}_2 = \bar{q}_2(q_1, q_2), \quad \bar{q}_3 = q_3 = \Psi_0,$$

et dans lequel les conditions (4.86) sont remplies; bien entendu, ce changement de variables est possible seulement lorsqu'on a :

$$j = \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_1} \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_2} - \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_2} \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_1} \neq 0, \quad \text{partout dans } (\mathcal{D}).$$

³⁸⁾ T_q^{-} doit avoir les mêmes propriétés que le système T_q , c'est-à-dire celles précisées au (Ch. I, § 3).

En notant par $\bar{g}_{kl}$ ($k, l = 1, 2, 3$) les composantes covariantes du tenseur fondamental dans le système de coordonnées $T_{\bar{q}}$, on a :

$$\bar{g}_{kl} = g_{ij} \frac{\partial q_i}{\partial \bar{q}_k} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l},$$

et, en vertu des hypothèses faites, il résulte :

$$\frac{\partial \bar{g}_{kl}}{\partial q_3} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_3} \frac{\partial q_i}{\partial \bar{q}_k} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l} = 0,$$

pour $k, l = 1, 2, 3$. On obtient donc le système homogène d'équations :

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_1} \right)^2 \frac{\partial g_{11}}{\partial q_3} + 2 \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_1} \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_1} \frac{\partial g_{12}}{\partial q_3} + \left(\frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_1} \right)^2 \frac{\partial g_{22}}{\partial q_3} = 0, \\ & \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_1} \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_2} \frac{\partial g_{11}}{\partial q_3} + \left(\frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_1} \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_2} + \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_2} \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_1} \right) \frac{\partial g_{12}}{\partial q_3} + \\ & \quad + \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_1} \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_2} \frac{\partial g_{22}}{\partial q_3} = 0, \\ & \left(\frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_2} \right)^2 \frac{\partial g_{11}}{\partial q_3} + 2 \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_2} \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_2} \frac{\partial g_{12}}{\partial q_3} + \left(\frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_2} \right)^2 \frac{\partial g_{22}}{\partial q_3} = 0, \end{aligned} \right\}$$

auquel s'ajoute la relation suivante :

$$\frac{\partial \bar{g}_{33}}{\partial \bar{q}_3} = \frac{\partial g_{33}}{\partial q_3}.$$

Un calcul simple montre que le déterminant Δ des coefficients de ce système homogène a la valeur suivante :

$$\Delta = \left(\frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_1} \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_2} - \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_2} \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_1} \right)^3 = j^3.$$

Par suite, si ce changement de variables existe — c'est-à-dire si $j \neq 0$ —, le système homogène obtenu n'admet que la solution banale — c'est-à-dire les composantes covariantes g_{ij} du tenseur fondamental dans le système de coordonnées T_q satisfont aux conditions (4.86) — ; l'hypothèse faite a donc conduit à une conclusion absurde. Par conséquent, si les conditions (4.86) ne sont pas remplies pour un certain choix des coordonnées q_1 et q_2 , elles ne sont pas remplies pour les autres choix possibles de ces coordonnées.

On remarque donc que la méthode utilisée a permis une certaine séparation des conditions qui concernent la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et respectivement la fonction $H_0(x_1, x_2, x_3)$; en faisant un certain choix de l'expression analytique de la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ — et en précisant, en même temps, les conditions auxquelles doit satisfaire ce choix —, on a réduit l'étude du système « associé » (Σ), qui contient deux équations

à deux fonctions inconnues, à l'étude d'une seule équation à une seule fonction inconnue. En réalité, ce procédé est celui qui conduit à l'introduction de la classe des écoulements plans et non pas l'élimination (plus ou moins arbitraire) de la troisième variable d'espace.

Maintenant, pour envisager les propriétés caractéristiques des écoulements qui correspondent à la classe de solutions «génératrices» (Ψ_0, H_0) introduite précédemment, on revient au système d'équations (II₁) en le mettant sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \vec{v} &\equiv \text{grad } \Phi - \Lambda \frac{dK}{dH_0} \text{grad } H_0 = \text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0, \\ (b) \quad \vec{\omega} \cdot \text{grad } \Psi_0 &= \frac{dK}{dH_0}, \\ (c) \quad p &= K(H_0) - \frac{1}{2} V^2 - Q. \end{aligned} \right\} \quad (4.90)$$

Les relations (4.90, a) et (4.82) donnent les expressions suivantes :

$$u^1 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial H_0}{\partial q_2}, \quad u^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial H_0}{\partial q_1}, \quad u^3 = 0, \quad (4.91)$$

et :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial q_1} - \Lambda_0 \frac{dK}{dH_0} \frac{\partial H_0}{\partial q_1} = -\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial H_0}{\partial q_2} + \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial H_0}{\partial q_1}, \\ u_2 &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial q_2} - \Lambda_0 \frac{dK}{dH_0} \frac{\partial H_0}{\partial q_2} = -\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial H_0}{\partial q_2} + \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial H_0}{\partial q_1}, \\ u_3 &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial q_3} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.92)$$

pour les composantes contravariantes $u^i (i = 1, 2, 3)$ et respectivement pour celles covariantes $u_i (i = 1, 2, 3)$ de la vitesse $\vec{v}$ — par rapport au système de coordonnées curvilignes T_q choisi — ; on a noté :

$$\Phi_0 = \Phi_0(q_1, q_2, q_3) = \Phi[x_1(q_1, q_2, q_3), x_2(q_1, q_2, q_3), x_3(q_1, q_2, q_3)],$$

$$\Lambda_0 = \Lambda_0(q_1, q_2, q_3) = \Lambda[x_1(q_1, q_2, q_3), x_2(q_1, q_2, q_3), x_3(q_1, q_2, q_3)],$$

les expressions de ces fonctions par rapport aux nouvelles variables.

Les relations établies précédemment mettent en évidence les propriétés suivantes, qui caractérisent les écoulements correspondant à la classe de solutions «génératrices» (Ψ_0, H_0) définie par les conditions (4.82'), (4.86) et (4.87') :

1° Ces écoulements ont lieu le long de la famille de surfaces (4.89).

2° La fonction «potentielle» Φ et la fonction de «tourbillon» Λ prennent toutes leurs valeurs sur chaque surface de la famille (4.89), en vertu des relations (4.92).

3° Les composantes contravariantes et celles covariantes de la vitesse $\vec{v}$ prennent toutes leurs valeurs sur chaque surface de la famille (4.89), à cause des conditions (4.82) et (4.86); il en résulte donc la même propriété pour le module de la vitesse : $V^2 = u^1 u_1 + u^2 u_2$. Mais la vitesse $\vec{v}$ n'est pourtant pas « la même » sur chaque surface de la famille (4.89), puisque sa direction varie d'une surface à l'autre — pour les mêmes valeurs de q_1 et q_2 —, la condition (4.67, b) n'étant pas imposée dans ce cas.

4° Dans ce système de coordonnées curvilignes, les composantes contravariantes ω^i ($i = 1, 2, 3$) et celles covariantes ω_i ($i = 1, 2, 3$) du tourbillon $\vec{\omega}$ ont les valeurs suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \omega^1 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial u_3}{\partial q_2} - \frac{\partial u_2}{\partial q_3} \right) \equiv 0, \\ \omega^2 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_3} - \frac{\partial u_3}{\partial q_1} \right) \equiv 0, \\ \omega^3 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial q_1} - \frac{\partial u_1}{\partial q_2} \right) \equiv \operatorname{div} [g^{33} \operatorname{grad} H_0], \end{aligned} \right\} \quad (4.93)$$

$$\omega_1 = g_{1j} \omega^j \equiv 0, \quad \omega_2 = g_{2j} \omega^j \equiv 0, \quad \omega_3 = g_{3j} \omega^j = g_{33} \omega^3. \quad (4.94)$$

On a donc :

$$\vec{\omega} = \sqrt{g_{33}} \omega^3 \vec{e}_3 = \sqrt{g^{33}} \omega_3 \vec{e}^3 = g_{33} \frac{dK}{dH_0} \operatorname{grad} \Psi_0, \quad (4.95)$$

et :

$$|\vec{\omega}|^2 = \omega_3 \omega^3 = g_{33} (\omega^3)^2 = g_{33} \left(\frac{dK}{dH_0} \right)^2. \quad (4.96)$$

Par conséquent, le tourbillon $\vec{\omega}$ est, en chaque point du domaine considéré ($\mathcal{D}$), orthogonal à la surface de la famille (4.89) qui passe par ce point; son module ne varie pas d'une surface de cette famille à l'autre, mais le tourbillon $\vec{\omega}$ lui-même varie, parce que la condition (4.71, a) n'est pas imposée dans ce cas.

5° La relation (4.95) conduit aussi à la condition suivante :

$$\operatorname{div} \vec{\omega} = g_{33} \frac{dK}{dH_0} \Delta \Psi_0 + \operatorname{grad} \left(g_{33} \frac{dK}{dH_0} \right) \cdot \operatorname{grad} \Psi_0 = 0;$$

mais :

$$\operatorname{grad} \left(g_{33} \frac{dK}{dH_0} \right) \cdot \operatorname{grad} \Psi_0 \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}),$$

à cause des conditions (4.82') et (4.86).

Il en résulte donc que, dans le cas des écoulements rotationnels de ce type, la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ doit être harmonique.

6° Les relations (4.88) et (4.95) montrent que la condition (4.76) est remplie dans ce cas et, par suite, la vitesse $\vec{v}$ peut être représentée

sous la forme (4.77); on déduit également, de même façon qu'au paragraphe 5 de ce chapitre, que la famille de surfaces (4.89) doit appartenir à un système triple orthogonal de familles de surfaces. On peut donc prendre $g_{12} \equiv 0$, dans toutes les relations établies dans ce paragraphe, sans introduire ainsi une hypothèse supplémentaire.

Par conséquent, dans l'étude d'un écoulement de cette classe, on peut toujours trouver un système de trois «paramètres» définissant l'écoulement, chacun d'eux étant une fonction «strictement indépendante» par rapport aux deux autres, dans le domaine où l'écoulement envisagé est rotationnel.

7° Si le potentiel Q des forces extérieures $\vec{F}$ ne varie pas d'une surface (4.89) à l'autre $\left(\frac{\partial Q}{\partial q_3} \equiv 0\right)$ — c'est-à-dire si $Q(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction «strictement indépendante» par rapport à la fonction

$\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ —, alors la pression p prend toutes ses valeurs le long de chaque surface de la famille (4.89) en vertu de l'équation (4.90, c) et des propriétés précédentes; donc, dans ce cas, la pression $p(x_1, x_2, x_3)$ est aussi une fonction «strictement indépendante» par rapport à la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, dans le domaine où l'écoulement envisagé est rotationnel.

En conclusion, on a défini une nouvelle classe d'écoulements en partant d'une certaine classe de «solutions génératrices» (Ψ_0, H_0); l'analyse faite dans les trois derniers paragraphes permet de déduire aisément que, réciproquement, aux écoulements définis par les sept propriétés physiques précédentes correspond la classe de solutions «génératrices» (Ψ_0, H_0) définie dans ce paragraphe. Ces écoulements sont donc caractérisés par cette classe de solutions «génératrices».

On a défini une classe d'écoulements plus large que la classe d'écoulements plans, car elle est caractérisée par des propriétés physiques plus générales; on peut facilement vérifier que les écoulements plans et les écoulements à symétrie axiale appartiennent à cette nouvelle classe d'écoulements.

On peut également vérifier que des écoulements de cette classe ne peuvent avoir lieu ni le long de la famille des sphères concentriques, ni le long de la famille des cylindres circulaires concentriques.

Il est difficile de trouver l'expression analytique générale de l'équation de la famille de surfaces (4.89), le long desquelles on peut avoir des écoulements de cette classe; on peut déjà penser que sur cette voie, dans l'étude des classes d'écoulements encore plus générales, il n'est ni possible, ni tout-à-fait nécessaire, de trouver l'expression analytique de toutes les familles de surfaces le long desquelles on peut avoir des écoulements de la classe envisagée.

En général, lorsqu'on connaît l'expression analytique de la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et quelques propriétés physiques de l'écoulement envisagé, notre méthode permet de définir la classe à laquelle appartient cet écoulement et de préciser le type du problème mathématique qui régit cette classe.

Si l'on veut construire des nouvelles classes d'écoulements, on peut suivre l'une des deux voies mises en évidence dans ce chapitre ; en considérant le système «réduit» (§) comme un système de «conditions nécessaires» pour les deux «paramètres» $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ — ce système caractérisant tout écoulement de classe (C_i) —, il faut lui ajouter un système de «conditions suffisantes» pour pouvoir ainsi définir une classe d'écoulements — qui est un sous ensemble de l'ensemble d'écoulements (C_i) — caractérisée par certaines propriétés. Une première voie prend comme point de départ le système «réduit» (§) ; on cherche un système de «conditions suffisantes» (de même type que le Théorème XVI), qui peut déterminer une classe de solutions «généatrices» (Ψ_0, H_0). Ensuite, on détermine les propriétés physiques, qui caractérisent les écoulements correspondants à cette classe de solutions «généatrices».

Si l'on prend l'autre voie, le système de «conditions suffisantes» est donné par le système de «propriétés physiques» concernant «la géométrie» de l'écoulement ; dans ce cas, il reste à déterminer la classe de solutions «généatrices» correspondante.

Dans les deux cas envisagés, nous avons suivi parallèlement les deux voies précisées précédemment et, pour les deux classes d'écoulements considérées, nous avons établi une correspondance biunivoque entre les écoulements caractérisés par leurs propriétés physiques et une classe de solutions «généatrices» (Ψ_0, H_0).

On dira que les écoulements de classe (C_i) , caractérisés par les sept propriétés physiques énoncées dans ce paragraphe, sont «des écoulements bidimensionnels de classe (C_i^P) ».

Les résultats obtenus dans ce paragraphe peuvent être formulés de la manière suivante :

THÉOREME XVIII. *Les écoulements rotationnels et «bidimensionnels de classe (C_i^P) » sont caractérisés par la classe de solutions «généatrices» (Ψ_0, H_0) définie par les conditions suivantes :*

- 1° *La fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction harmonique.*
- 2° *La famille de surfaces :*

$$\Psi_0(x_1, x_2, x_3) = \text{const.},$$

le long de laquelle ont lieu les écoulements considérés, appartient à un système triple orthogonal de familles de surfaces ; donc, on peut toujours trouver un système de trois «paramètres» définissant un tel écoulement, chacun d'eux étant une fonction «strictement indépendante» par rapport aux deux autres.

3° *Dans tout système orthogonal de coordonnées curvilignes T_q , dans lequel on choisit $q_3 = \Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, les composantes covariantes du tenseur fondamental satisfont aux conditions (4.86).*

4° *Les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ varient «d'une manière strictement indépendante» par rapport aux variables cartésiennes orthogonales x_1, x_2, x_3 ; les deux fonctions satisfont également à*

l'équation (4.87'), dans laquelle l'expression analytique de la fonction $K = K(H_0)$ reste non déterminée.

Les Théorèmes XIV et XVIII assurent l'existence d'une correspondance biunivoque entre ces écoulements et la classe de solutions «formelles» (Ψ, H) du système «réduit» (§), qui est définie en fonction de Ψ_0 et H_0 par les relations (4.18) et (4.19).

On peut étendre aux écoulements rotationnels et «bidimensionnels de classe (C_1^P) » toutes les remarques faites au quatrième paragraphe de ce chapitre dans le cas des écoulements plans. En particulier, les relations (4.92) permettent l'introduction de deux «potentiels complexes» $F_1(\zeta)$ et $F_2(\zeta)$, qui sont des fonctions pseudoanalytiques de première et respectivement de deuxième espèce, en les considérant comme fonctions de la variable complexe ζ introduite sur les surfaces de la famille (4.89); un théorème analogue au Théorème XVI peut être aisément démontré. D'autres classes d'écoulements, obtenues par la même méthode, seront envisagées dans un autre travail.

TROISIÈME PARTIE: FLUIDES COMPRESSIBLES

CHAPITRE V

Systèmes « réduits » et solutions « génératrices » pour les écoulements des classes (C_S) et (C_H)

§ 1. Dans ce chapitre nous nous proposons d'étendre aux écoulements des classes (C_S) et (C_H) la méthode utilisée et la plupart des résultats obtenus dans le cas, plus simple et plus particulier, des écoulements de classe (C_i) .

Considérons premièrement les écoulements de classe (C_S) ; nous allons chercher à ramener l'étude du système d'équations (II_S) à celle d'un système « réduit », en éliminant certaines fonctions inconnues—de la même façon qu'au Ch. III, § 1—.

En notant :

$$\vec{w} = \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H, \quad W = |\vec{w}|, \quad (5.1)$$

on déduit les relations suivantes :

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} = \text{rot } \left(\frac{1}{\rho} \vec{w} \right) = \frac{1}{\rho} \text{rot } \vec{w} + \frac{1}{\rho^2} \vec{w} \wedge \text{grad } \rho \quad (5.2)$$

et :

$$\text{grad } \left(\frac{1}{2} V^2 \right) = \text{grad } \left(\frac{1}{2\rho^2} W^2 \right) = \frac{1}{\rho^2} \text{grad } \left(\frac{1}{2} W^2 \right) - \frac{W^2}{\rho^3} \text{grad } \rho. \quad (5.3)$$

D'autre part, les équations $(II_S. c)$ et $(II_S. d)$ donnent :

$$H = \int \frac{a^2}{\rho} d\rho + \frac{1}{2} V^2 + Q, \quad (5.4)$$

d'où l'on déduit facilement :

$$\text{grad } H = \frac{a^2}{\rho} \text{ grad } \rho + \text{grad} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) + \text{grad } Q; \quad (5.4')$$

on a désigné ici par $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$ le carré de la vitesse locale du son dans le milieu fluide considéré. Pour simplifier les calculs on va négliger le potentiel Q des forces extérieures ($Q \equiv 0$) dans la relation (5.4) et dans les suivantes. Dans ce cas, en éliminant : $\text{grad} \left(\frac{1}{2} V^2 \right)$ entre les relations (5.3) et (5.4'), on obtient :

$$\left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2} \right) \frac{1}{\rho} \text{ grad } \rho = \text{grad } H - \frac{1}{\rho^2} \text{ grad} \left(\frac{1}{2} W^2 \right). \quad (5.5)$$

Si l'on prend le rotationnel des vecteurs qui se trouvent dans les deux membres de l'équation (II_s. b), on élimine la fonction $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ et on obtient l'équation vectorielle :

$$\text{grad } H \wedge \text{grad } \Lambda = \text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{ grad } \Psi \wedge \text{grad } H \right); \quad (5.6)$$

en rapportant cette équation vectorielle au « premier système naturel » de coordonnées curvilignes T_p , on en déduit le système d'équations scalaires :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad & \text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{ grad } \Psi \wedge \text{grad } H \right) \cdot \text{grad } \Lambda = 0, \\ \text{(b)} \quad & \text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{ grad } \Psi \wedge \text{grad } H \right) \cdot \text{grad } \Psi = \frac{D(\Lambda, \Psi, H)}{D(x_1, x_2, x_3)}, \\ \text{(c)} \quad & \text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{ grad } \Psi \wedge \text{grad } H \right) \cdot \text{grad } H = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.6')$$

et on vérifie que seulement deux équations de ce système sont des équations indépendantes du point de vue du problème envisagé.

En partant du système d'équations (5.6') et en suivant la même voie qu'au Ch. III, § 1, on arrivera aux mêmes conclusions et aux mêmes

remarques. Ainsi, les équations scalaires et indépendantes (5.6', b), (5.6', c), (II_s. a) et (5.4) conduisent au système suivant :

$$\left. \begin{aligned} \text{(A)} \quad \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \Psi \wedge \operatorname{grad} H \right) \cdot \operatorname{grad} H &= 0, \\ \text{(B)} \quad \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \Psi \wedge \operatorname{grad} H \right) \cdot \operatorname{grad} \Psi &= \rho, \\ \text{(C)} \quad \int \frac{a^2}{\rho} d\rho + \frac{1}{2\rho^2} |\operatorname{grad} \Psi \wedge \operatorname{grad} H|^2 &= H; \end{aligned} \right\} \quad (\S^{(S)})$$

les trois équations scalaires et indépendantes composant ce système ne contiennent que les trois fonctions inconnues :

$$\Psi(x_1, x_2, x_3), H(x_1, x_2, x_3) \text{ et } \rho(x_1, x_2, x_3).$$

Les fonctions $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$ et $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ sont obtenues par la même voie et avec le même degré de détermination que dans le cas précédent (voir Ch. III, §1); ainsi, la fonction $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$ doit satisfaire à l'équation (II_s. a) et la fonction $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ doit satisfaire soit à l'équation scalaire :

$$d\Phi = \Lambda dH + \frac{1}{\rho} (\operatorname{grad} \Psi \wedge \operatorname{grad} H) \cdot d\vec{r}, \quad (5.7)$$

soit à l'une des équations (3.3'), qui gardent la même forme analytique dans ce cas. Enfin, la loi d'état (II_s. c) donne l'expression analytique de la pression $p(x_1, x_2, x_3)$.

En général, les équations (II_s. a), (5.7) — ou l'une des équations (3.3') — et (II_s. c) peuvent donner les expressions analytiques des fonctions $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$, $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ et respectivement $p(x_1, x_2, x_3)$ dès que les fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, $H(x_1, x_2, x_3)$ et $\rho(x_1, x_2, x_3)$ ont été déterminées à l'aide du système d'équations ($\S^{(S)}$); on retient ici comme valables toutes les remarques faites auparavant (Ch. III, §1) sur le degré de détermination de ces fonctions.

L'ensemble formé par les équations ($\S^{(S)}$), (II_s. a), (5.7) et (II_s. c) peut donc remplacer le système d'équations (II_s), les développements précédents prouvant leur équivalence; l'étude de cet ensemble est plus facile et plus avantageuse que celle du système (II_s), puisque ses parties composantes peuvent être envisagées successivement.

Si nous nous limitons à l'étude du système d'équations ($\S^{(S)}$)³⁹, nous ne pourrions trouver — dans un certain problème concret de mécanique — un seul écoulement mais une classe d'écoulements, ce système n'exprimant que trois des six « conditions physiques » imposées par le système initial (II_s).

Le système d'équations ($\S^{(S)}$) joue un rôle particulier dans une étude qualitative des écoulements de classe (C_s); on verra plus loin que son rôle est similaire à celui joué par le système (S) dans le cas des écoule-

³⁹) À ce système on peut toujours ajouter directement la loi d'état (II_s. c), qui précise le fluide considéré.

ments de classe (C_i). Pour ces raisons on nommera ($\mathfrak{S}^{(S)}$) « le système réduit du système d'équations (II_S) » ; la notation utilisée permet aussi de dire « le système réduit ($\mathfrak{S}^{(S)}$) », l'indice supérieur en précisant que ce système est attaché à un écoulement de classe (C_S).

Pour mieux mettre en évidence l'analogie qui existe entre les deux systèmes « réduits » ($\mathfrak{S}^{(S)}$) et ($\mathfrak{S}$) il est nécessaire d'abord d'éliminer les dérivées partielles de la fonction $\rho(x_1, x_2, x_3)$ dans les deux premières équations de ($\mathfrak{S}^{(S)}$) ; dans ce but, on peut utiliser les relations (5.2) et (5.5), qui donnent :

$$\begin{aligned} \left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \vec{\omega} &= \left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \vec{w} + \frac{1}{\rho} \vec{w} \wedge \left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \rho = \\ &= \left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \vec{w} + \frac{1}{\rho} \vec{w} \wedge \operatorname{grad} H - \frac{1}{\rho^3} \vec{w} \wedge \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} W^2\right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

L'équation ($\mathfrak{S}^{(S)}$, A) peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \operatorname{grad} H + \frac{1}{\rho^2} \left(\operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} W^2\right) \wedge \vec{w}\right) \cdot \operatorname{grad} H = 0 \quad (5.9)$$

ou bien encore :

$$(a^2 \rho^2 - W^2) \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \operatorname{grad} H + (\vec{w} \wedge \operatorname{grad} H) \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} W^2\right) = 0. \quad (5.9')$$

De la même manière, l'équation ($\mathfrak{S}^{(S)}$, B) et la relation (5.8) donnent :

$$\begin{aligned} \left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \operatorname{grad} \Psi + \frac{1}{\rho} (\vec{w} \wedge \operatorname{grad} H) \cdot \operatorname{grad} \Psi - \\ - \frac{1}{\rho^3} \left(\vec{w} \wedge \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} W^2\right)\right) \cdot \operatorname{grad} \Psi = \left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \rho, \end{aligned}$$

et en remarquant qu'on a :

$$\frac{1}{\rho} (\vec{w} \wedge \operatorname{grad} H) \cdot \operatorname{grad} \Psi = -\frac{1}{\rho} (\operatorname{grad} \Psi \wedge \operatorname{grad} H) \cdot \vec{w} = -\frac{W^2}{\rho},$$

il en résulte la forme suivante de l'équation ($\mathfrak{S}^{(S)}$, B) :

$$\left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \operatorname{grad} \Psi + \frac{1}{\rho^2} \left(\operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} W^2\right) \wedge \vec{w}\right) \cdot \operatorname{grad} \Psi = a^2 \rho^2, \quad (5.10)$$

ou bien encore :

$$(a^2 \rho^2 - W^2) \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \operatorname{grad} \Psi + (\vec{w} \wedge \operatorname{grad} \Psi) \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} W^2 \right) = a^2 \rho^4. \quad (5.10')$$

On voit donc que les dérivées partielles de la fonction $\rho(x_1, x_2, x_3)$ n'interviennent plus dans ces expressions des équations $(\mathbb{S}^{(S)}, A)$ et $(\mathbb{S}^{(S)}, B)$, qui ne contiennent que les dérivées partielles (du premier et du second ordre) des fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $H(x_1, x_2, x_3)$.

On peut simplifier davantage les expressions analytiques trouvées précédemment pour les premiers membres des équations $(\mathbb{S}^{(S)}, A)$, $(\mathbb{S}^{(S)}, B)$, et on obtient ces simplifications à l'aide de l'identité :

$$\operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} W^2 \right) = (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} + \vec{w} \wedge \operatorname{rot} \vec{w}, \quad (5.11)$$

qui est une identité vectorielle générale bien connue ; on a utilisé ici les notations habituelles :

$$(a) \nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{i}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{i}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{i}_3, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (5.12)$$

(b) $(\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} = (\vec{w} \cdot \operatorname{grad} w_{x_1}) \vec{i}_1 + (\vec{w} \cdot \operatorname{grad} w_{x_2}) \vec{i}_2 + (\vec{w} \cdot \operatorname{grad} w_{x_3}) \vec{i}_3$,
 $\vec{i}_k$ ($k = 1, 2, 3$) étant le vecteur unitaire de l'axe Ox_k du système cartésien de coordonnées T_x , et w_{x_k} étant la composante du vecteur $\vec{w}$ par rapport à l'axe Ox_k .

Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} (a^2 \rho^2 - W^2) \operatorname{rot} \vec{w} + \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} W^2 \right) \wedge \vec{w} &= \\ &= (a^2 \rho^2 - W^2) \operatorname{rot} \vec{w} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} \wedge \vec{w} + (\vec{w} \wedge \operatorname{rot} \vec{w}) \wedge \vec{w} = \\ &= (a^2 \rho^2 - W^2) \operatorname{rot} \vec{w} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} \wedge \vec{w} + W^2 \operatorname{rot} \vec{w} - (\vec{w} \cdot \operatorname{rot} \vec{w}) \vec{w} = \\ &= a^2 \rho^2 \operatorname{rot} \vec{w} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} \wedge \vec{w} - (\vec{w} \cdot \operatorname{rot} \vec{w}) \vec{w}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

et il en résulte les expressions analytiques suivantes :

$$a^2 \rho^2 \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \operatorname{grad} H + (\vec{w} \wedge \operatorname{grad} H) \cdot (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} = 0, \quad (5.9'')$$

et :

$$a^2 \rho^2 \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \operatorname{grad} \Psi + (\vec{w} \wedge \operatorname{grad} \Psi) \cdot (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} = a^2 \rho^4, \quad (5.10'')$$

pour les premiers membres des équations $(\mathbb{S}^{(S)}, A)$ et respectivement $(\mathbb{S}^{(S)}, B)$. On s'aperçoit que dans les équations (5.9'') et (5.10'') « les coefficients » des termes $a^2 \rho^2$ ont la même expression analytique que les premiers

membres des équations (A) et respectivement (B) du système « réduit » (§), qui a été envisagé dans le chapitre précédent.

On introduit les notations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} M^{(S)} &\equiv \text{rot} (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) \cdot \text{grad } \Psi \equiv \text{rot } \vec{w} \cdot \text{grad } \Psi, \\ N^{(S)} &\equiv \text{rot} (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } H) \cdot \text{grad } H \equiv \text{rot } \vec{w} \cdot \text{grad } H, \\ \vec{m} &\equiv (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w}, \quad \xi^{(S)} \equiv \vec{m} \cdot \text{grad } \Psi, \quad \eta^{(S)} \equiv \vec{m} \cdot \text{grad } H, \\ \vec{n} &\equiv (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} \wedge \vec{w}, \quad \alpha^{(S)} \equiv \vec{n} \cdot \text{grad } \Psi, \quad \beta^{(S)} \equiv \vec{n} \cdot \text{grad } H, \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

l'indice supérieur en précisant que ces grandeurs sont attachées à un écoulement de classe (C_S) .

Des calculs simples, mais qui sont trop longs pour être donnés en détail ici, conduisent aux expressions analytiques suivantes pour les fonctions introduites précédemment :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad M^{(S)} &= |\text{grad } \Psi|^2 \Delta H - (\text{grad } \Psi \cdot \text{grad } H) \Delta \Psi + \\ &+ \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right), \\ \text{(b)} \quad N^{(S)} &= (\text{grad } \Psi \cdot \text{grad } H) \Delta H - |\text{grad } H|^2 \Delta \Psi + \\ &+ \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial H}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right), \\ \text{(c)} \quad \xi^{(S)} &= - \sum_{i,j=1}^3 w_{x_i} w_{x_j} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \eta^{(S)} = - \sum_{i,j=1}^3 w_{x_i} w_{x_j} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \text{(d)} \quad \alpha^{(S)} &= \sum_{i,j=1}^3 \left[(\text{grad } \Psi \cdot \text{grad } H) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j} - |\text{grad } \Psi|^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right] w_{x_i} w_{x_j} = \\ &= |\text{grad } \Psi|^2 \eta^{(S)} - (\text{grad } \Psi \cdot \text{grad } H) \xi^{(S)}, \\ \text{(e)} \quad \beta^{(S)} &= \sum_{i,j=1}^3 \left[|\text{grad } H|^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j} - (\text{grad } \Psi \cdot \text{grad } H) \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right] w_{x_i} w_{x_j} = \\ &= (\text{grad } \Psi \cdot \text{grad } H) \eta^{(S)} - |\text{grad } H|^2 \xi^{(S)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

On remarque d'abord que les fonctions $M^{(S)}$ et $N^{(S)}$ ont été mises ici sous des formes différentes de celles utilisées, dans le chapitre précédent, pour les expressions analogues M et respectivement N , mais qui s'approchent d'une certaine façon des formes trouvées plus haut pour les fonctions $\alpha^{(S)}$, $\beta^{(S)}$, etc... ; bien entendu, si l'on considère que Ψ est la fonction de courant et H est l'énergie totale d'un écoulement de classe (C_1) , alors on peut utiliser aussi les représentations (5.15,a) et (5.15,b) pour les fonctions analogues M et respectivement N .

D'autre part, on peut considérer les relations (5.15, d) et (5.15, e) comme un système algébrique et linéaire par rapport aux inconnues $\xi^{(S)}$ et $\eta^{(S)}$; ce système algébrique est compatible et déterminé partout où :

$$\delta = |\text{grad } \Psi|^2 |\text{grad } H|^2 - (\text{grad } \Psi \cdot \text{grad } H)^2 = W^2 \quad (5.16)$$

n'est pas nul, c'est-à-dire en tous les points où la vitesse $\vec{v}$ n'est pas nulle. En tous ces points on a aussi :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad W^2 \xi^{(S)} &= (\text{grad } \Psi \cdot \text{grad } H) \alpha^{(S)} - |\text{grad } \Psi|^2 \beta^{(S)}, \\ (b) \quad W^2 \eta^{(S)} &= |\text{grad } H|^2 \alpha^{(S)} - (\text{grad } \Psi \cdot \text{grad } H) \beta^{(S)}, \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

et les fonctions $\xi^{(S)}$ et $\eta^{(S)}$ ne peuvent s'annuler simultanément que si, et seulement si, les fonctions $\alpha^{(S)}$ et $\beta^{(S)}$ s'annulent simultanément; on voit facilement que la propriété réciproque est également vraie.

En conclusion, le système « réduit » ($\mathbb{S}^{(S)}$) peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} (A) \quad N^{(S)} + \frac{1}{a^2 \rho^2} \beta^{(S)} &= 0, \\ (B) \quad M^{(S)} + \frac{1}{a^2 \rho^2} \alpha^{(S)} &= \rho^2, \\ (C) \quad \int \frac{a^2}{\rho} d\rho + \frac{W^2}{2\rho^2} &= H. \end{aligned} \right\} \quad (\mathbb{S}_I^{(S)})$$

§ 2. Lorsqu'on veut envisager des problèmes concernant les écoulements de classe (C_H) en partant du système d'équations (II_H), on peut prendre la même voie que dans le paragraphe antérieur.

On va désigner cette fois par $\vec{w}$ le vecteur :

$$\vec{w} = \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } S \text{ et } W = |\vec{w}|, \quad (5.1')$$

la fonction $S(x_1, x_2, x_3)$ en remplaçant ici la fonction $H(x_1, x_2, x_3)$ de (5.1) et $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ étant maintenant la fonction de courant d'un écoulement de classe (C_H); on voit que les relations (5.2) et (5.3) gardent la même forme analytique, $\vec{w}$ ayant la valeur (5.1) dans le premier cas et la valeur (5.1') dans le second cas.

Les relations (5.4) et (5.5) n'étant plus valables pour les écoulements de classe (C_H), les relations analogues seront obtenues de la même façon qu'auparavant; dans ce but, les quatre dernières équations du système (II_H) donnent :

$$-\text{grad} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) = \text{grad } h = \frac{1}{\rho} \text{grad } p + T \text{grad } S, \quad (5.18)$$

et

$$-\frac{1}{\rho^2} \text{grad } \rho = \frac{\partial^2 h}{\partial p^2} \text{grad } p + \frac{\partial^2 h}{\partial p \partial S} \text{grad } S, \quad (5.19)$$

en négligeant de nouveau le potentiel Q des forces extérieures ($Q \equiv 0$), pour simplifier les calculs. Les relations (5.3), (5.18) et (5.19) conduisent à l'équation suivante :

$$\left(\frac{1}{\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}} + W^2 \right) \frac{\partial h}{\partial p} \text{grad } \rho = \frac{1}{\frac{\partial h}{\partial p}} \left(\frac{\frac{\partial h}{\partial S}}{\frac{\partial h}{\partial p}} - \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial p \partial S}}{\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}} \right) \text{grad } S + \text{grad } \frac{W^2}{2}, \quad (5.20)$$

qui est l'analogie de (5.5), car elle donne les expressions des dérivées partielles de la fonction $\rho(x_1, x_2, x_3)$ par rapport aux dérivées partielles des fonctions $S(x_1, x_2, x_3)$ et $\Psi(x_1, x_2, x_3)$. On trouve aussi dans (5.20) les dérivées partielles, par rapport aux variables p et S , de l'enthalpie $h(p, S)$; si l'on suppose que le fluide est « donné », c'est-à-dire si l'on connaît l'expression analytique de la loi d'état « canonique » ($\text{II}_{H.c}$), alors les expressions analytiques de ces dérivées partielles de la fonction $h(p, S)$ sont connues (en fonction de p et S).

On voit que les relations (5.3), (5.18) et (5.19) peuvent conduire à la forme (5.20) de cette équation seulement lorsque la loi d'état « canonique » ($\text{II}_{H.c}$) satisfait à la condition suivante :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial p^2} \neq 0; \quad (5.21)$$

la condition (5.21) assure également qu'on peut obtenir p en fonction de ρ et S , à l'aide de l'équation ($\text{II}_{H.e}$) qui donne :

$$p = p(\rho, S), \quad (5.22)$$

considérée d'habitude comme une loi d'état.

Si l'on définit le fluide par une loi d'état du type (5.22), alors l'équation (5.20) prend la forme suivante :

$$\left(\frac{W^2}{\rho^2} - \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \frac{1}{\rho} \text{grad } \rho = \left(T + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S} \right) \text{grad } S + \frac{1}{\rho^2} \text{grad } \left(\frac{1}{2} W^2 \right); \quad (5.20')$$

mais, dans ce cas, il faut tenir compte d'une remarque déjà faite (Ch. I, § 2).

Dans les deux cas considérés on peut mettre en évidence la vitesse locale du son a en utilisant l'une ou l'autre des relations bien connues :

$$a^2 = - \frac{1}{\rho^2 \frac{\partial^2 h}{\partial p^2}}, \quad a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (5.23)$$

La condition (5.21) n'est pas remplie pour les fluides définis par une loi d'état « canonique » du type :

$$h = h_1(S)p + h_2(S), \quad (5.24)$$

où les expressions analytiques des fonctions $h_1(S)$ et $h_2(S)$ sont données ; dans ce cas on a :

$$\rho = \rho(S) = \frac{1}{h_1(S)}, \quad T = \frac{dh_1}{dS} p + \frac{dh_2}{dS}, \quad (5.25)$$

et il en résulte

$$\text{grad } \rho = \frac{d\rho}{dS} \text{grad } S = -\frac{1}{h_1^2(S)} \frac{dh_1}{dS} \text{grad } S. \quad (5.26)$$

Cette relation exprime les dérivées partielles de $\rho(x_1, x_2, x_3)$ par rapport aux dérivées partielles de $S(x_1, x_2, x_3)$, mais elle n'est pas l'analogue de (5.20), car elle n'utilise pas l'équation (II_H.d) et la relation (5.3).

Toutes les relations établies dans ce paragraphe sont nécessaires et utiles pour mettre sous une forme plus accessible et plus significative le système « réduit », qui peut être attaché au système d'équations (II_H). Pour obtenir ce système « réduit », on adopte le même point de vue que dans le cas des écoulements de classe (C_S) ; en ce qui concerne le passage au système « réduit », toutes les remarques et les précisions données dans le paragraphe antérieur restent valables et seront utilisées ici.

Premièrement, considérons le cas des fluides qui satisfont à la condition (5.21) ; dans ce cas, les équations (II_H.c), (II_H.e) et (II_H.f) donnent la possibilité d'exprimer la pression p , l'enthalpie h et la température absolue T en fonction de ρ et S . On désigne les expressions analytiques ainsi obtenues par :

$$\bar{p} = \bar{p}(\rho, S), \quad \bar{h} = \bar{h}(\rho, S), \quad \bar{T} = \bar{T}(\rho, S); \quad (5.27)$$

l'obtention de ces fonctions est le premier pas qui doit être fait dans cette voie, dans un problème concret où le fluide est « donné » et vérifie la condition (5.21).

Ensuite, de même façon que dans les cas précédents, on obtient le système suivant :

$$\left. \begin{aligned} \text{(A)} \quad \text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } S \right) \cdot \text{grad } S &= 0, \\ \text{(B)} \quad \text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } S \right) \cdot \text{grad } \Psi &= -\rho \bar{T}, \\ \text{(C)} \quad \bar{h}(\rho, S) + \frac{1}{2\rho^2} |\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } S|^2 &= \bar{h}_0, \end{aligned} \right\} \quad (\S^{(H)})$$

$\bar{h}_0$ étant la valeur de l'enthalpie $\bar{h}$ en le point de vitesse nulle ; les trois équations scalaires et indépendantes du système ($\S^{(H)}$) ne contiennent que les trois fonctions inconnues : $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, $S(x_1, x_2, x_3)$ et $\rho(x_1, x_2, x_3)$. Dès que ces trois fonctions inconnues ont été déterminées à l'aide du système d'équations ($\S^{(H)}$), les équations (5.27) donnent les expressions ana-

lytiques des fonctions $p(x_1, x_2, x_3)$, $h(x_1, x_2, x_3)$ et $T(p(x_1, x_2, x_3))$; pour déterminer les fonctions $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$ et $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ — par rapport aux valeurs trouvées pour les fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, $S(x_1, x_2, x_3)$ et $\rho(x_1, x_2, x_3)$ — on emploie l'équation (II_H.a) et respectivement l'équation scalaire :

$$d\Phi = \Lambda dS + \frac{1}{\rho} (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } S) \cdot \vec{dr}, \quad (5.28)$$

— ou l'une des équations (3.3') qui gardent encore leur forme analytique. Toutes les remarques faites dans les cas précédents (Voir Ch. III, § 1 et Ch. V, § 1), sur le degré de détermination des fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$ et $\Phi(x_1, x_2, x_3)$, restent encore valables ici.

Par conséquent, l'ensemble formé par les équations (5.27), ($\mathbb{S}^{(H)}$), (II_H.a) et (5.28) peut remplacer le système d'équations (II_H), leur équivalence étant prouvée précédemment; l'avantage principal de cette équivalence se trouve dans le fait que les parties composantes de cet ensemble peuvent être envisagées successivement, de même façon que dans le cas considéré dans le paragraphe antérieur.

Le système d'équations ($\mathbb{S}^{(H)}$), qui constitue la partie principale de cet ensemble, sera dénommé « le système réduit du système d'équations (II_H) »; on dira aussi « de système réduit ($\mathbb{S}^{(H)}$) », la notation introduite précisant que ce système est attaché à un écoulement de classe (C_H).

L'étude du système « réduit » ($\mathbb{S}^{(H)}$) conduit à la détermination d'une classe d'écoulements, en l'absence d'autres précisions, de même façon que dans les deux cas précédents et pour des raisons analogues.

Considérons aussi le cas d'un fluide défini par une loi d'état « canonique » du type (5.24); on désigne par (C'_H) la classe des écoulements isoénergétiques d'un tel fluide. On voit facilement que le système d'équations (II_H) peut être encore remplacé par un ensemble équivalent, qui est formé, dans ce cas, par les parties suivantes :

$$h = h_1(S) p + h_2(S), \quad \rho = \frac{1}{h_1(S)}, \quad T = \frac{dh_1}{dS} p + \frac{dh_2}{dS}, \quad (5.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(A)} \quad & \text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } S \right) \cdot \text{grad } S = 0, \\ \text{(B)} \quad & \text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } S \right) \cdot \text{grad } \Psi = -\rho T, \\ \text{(C)} \quad & h(p, S) + \frac{1}{2\rho^2} |\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } S|^2 = h_0, \end{aligned} \right\} \quad (\mathbb{S}'^{(H)})$$

et les équations (II_H.a) et (5.28), qui ont la même forme analytique qu'auparavant. Si l'on introduit les expressions analytiques (5.29) des fonctions $h(p, S)$, $\rho(S)$ et $T(p, S)$ dans les équations du système « réduit » ($\mathbb{S}'^{(H)}$), alors ces trois équations scalaires et indépendantes ne contiendront que trois fonctions inconnues : $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, $S(x_1, x_2, x_3)$ et $p(x_1, x_2, x_3)$.

Maintenant, si l'on ne veut garder que les dérivées partielles des fonctions $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ et $S(x_1, x_2, x_3)$, il faut utiliser une relation analogue à (5.8). Dans le cas d'un écoulement de classe (C_H) , les relations (5.2) et (5.20') donnent :

$$\begin{aligned} \left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \vec{\omega} &= \frac{1}{\rho} \left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \text{rot } \vec{w} + \frac{1}{\rho} \vec{w} \wedge \left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \frac{1}{\rho} \text{grad } \rho = \\ &= \frac{1}{\rho} \left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \text{rot } \vec{w} + \frac{1}{\rho} \left(\bar{T} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial S}\right) \text{grad } S \wedge \vec{w} + \frac{1}{\rho^3} \text{grad } \frac{W^2}{2} \wedge \vec{w}; \end{aligned} \quad (5.8')$$

dans le cas d'un écoulement de classe (C'_H) , les relations (5.2) et (5.26) donnent :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{\rho} \text{rot } \vec{w} + \frac{1}{\rho^2} \vec{w} \wedge \frac{d\rho}{dS} \text{grad } S = h_1(S) \text{rot } \vec{w} + \frac{dh_1}{dS} \text{grad } S \wedge \vec{w}. \quad (5.8'')$$

L'équation $(\mathbb{S}^{(H)}. A)$ peut donc s'écrire soit sous la forme :

$$\left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \text{rot } \vec{w} \cdot \text{grad } S + \frac{1}{\rho^2} \left(\text{grad } \frac{W^2}{2} \wedge \vec{w}\right) \cdot \text{grad } S = 0, \quad (5.30)$$

soit sous la forme équivalente :

$$(a^2 \rho^2 - W^2) \text{rot } \vec{w} \cdot \text{grad } S + (\vec{w} \wedge \text{grad } S) \cdot \text{grad } \frac{W^2}{2} = 0. \quad (5.30')$$

L'équation $(\mathbb{S}^{(H)}. B)$ et la relation (5.8') donnent :

$$\begin{aligned} \left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \frac{1}{\rho} \text{rot } \vec{w} \cdot \text{grad } \Psi + \frac{1}{\rho} \left(\bar{T} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial S}\right) (\text{grad } S \wedge \vec{w}) \cdot \text{grad } \Psi + \\ + \frac{1}{\rho^3} \left(\text{grad } \frac{W^2}{2} \wedge \vec{w}\right) \cdot \text{grad } \Psi = - \bar{T} \rho \left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right); \end{aligned}$$

en remarquant qu'on a :

$$(\text{grad } S \wedge \vec{w}) \cdot \text{grad } \Psi = (\text{grad } \Psi \wedge \text{grad } S) \cdot \vec{w} = W^2,$$

il en résulte les formes suivantes de l'équation $(\mathbb{S}^{(H)}. B)$:

$$\begin{aligned} \left(a^2 - \frac{W^2}{\rho^2}\right) \text{rot } \vec{w} \cdot \text{grad } \Psi + \frac{1}{\rho^2} \left(\text{grad } \frac{W^2}{2} \wedge \vec{w}\right) \cdot \text{grad } \Psi = \\ = a^2 \rho^2 \bar{T} - \frac{W^2}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial S}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

et :

$$\begin{aligned} (W^2 - a^2 \rho^2) \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \operatorname{grad} \Psi + (\operatorname{grad} \Psi \wedge \vec{w}) \cdot \operatorname{grad} \frac{W^2}{2} = \\ = a^2 \rho^4 \bar{T} + W^2 \rho \frac{\partial \bar{p}}{\partial S}. \end{aligned} \quad (5.31')$$

Les relations (5.13) permettent d'écrire encore les équations (§^(H). A) et (§^(H). B) sous les formes équivalentes :

$$a^2 \rho^2 \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \operatorname{grad} S + (\vec{w} \wedge \operatorname{grad} S) \cdot (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} = 0, \quad (5.30'')$$

et respectivement :

$$a^2 \rho^2 \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \operatorname{grad} \Psi + (\vec{w} \wedge \operatorname{grad} \Psi) \cdot (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} = -a^2 \rho^4 \bar{T} - W^2 \rho \frac{\partial \bar{p}}{\partial S}. \quad (5.31'')$$

Ces différentes formes des équations (§^(H). A) et (§^(H). B) montrent que dans leurs premiers membres on trouve le même type de fonctions que dans les premiers membres de (§^(S). A) et respectivement (§^(S). B).

En introduisant les notations analogues :

$$\left. \begin{aligned} M^{(H)} &\equiv \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \operatorname{grad} \Psi, \quad N^{(H)} \equiv \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \operatorname{grad} S, \\ \vec{m} &\equiv (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w}, \quad \xi^{(H)} \equiv \vec{m} \cdot \operatorname{grad} \Psi, \quad \eta^{(H)} \equiv \vec{m} \cdot \operatorname{grad} S, \\ \vec{n} &\equiv \vec{m} \wedge \vec{w}, \quad \alpha^{(H)} \equiv \vec{n} \cdot \operatorname{grad} \Psi, \quad \beta^{(H)} \equiv \vec{n} \cdot \operatorname{grad} S, \end{aligned} \right\} \quad (5.14')$$

on trouve finalement la forme suivante du système « réduit » (§^(H)) :

$$\left. \begin{aligned} \text{(A)} \quad N^{(H)} + \frac{1}{a^2 \rho^2} \beta^{(H)} &= 0, \\ \text{(B)} \quad M^{(H)} + \frac{1}{a^2 \rho^2} \alpha^{(H)} &= -\rho^2 \bar{T} - \frac{W^2}{a^2 \rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial S}, \\ \text{(C)} \quad \bar{h}(\rho, S) + \frac{W^2}{2\rho^2} &= \bar{h}_0. \end{aligned} \right\} \quad (\S_I^{(H)})$$

Les expressions analytiques des fonctions définies par les formules (5.14') s'obtiennent à l'aide des relations (5.15), en remplaçant partout la fonction $H(x_1, x_2, x_3)$ par la fonction $S(x_1, x_2, x_3)$. Enfin, on déduit facilement la forme suivante du système « réduit » (§'^(H)) :

$$\left. \begin{aligned} \text{(A)} \quad N^{(H)} &= 0, \\ \text{(B)} \quad M^{(H)} &= -\frac{1}{h_1} \left(\frac{T}{h_1} + W^2 \frac{dh_1}{dS} \right), \\ \text{(C)} \quad p h_1(S) + h_2(S) + \frac{1}{2} W^2 h_1^2(S) &= h_0, \end{aligned} \right\} \quad (\S_I'^{(H)})$$

en utilisant les relations (5.8'') et (5.14').

Évidemment, les équations (5.5) et (5.20') ne permettent pas le passage aux relations (5.8) et respectivement (5.8') lorsqu'on a un écoulement sonique dans tout le domaine considéré ($\mathfrak{D}$); dans ce cas très particulier, toutes les conséquences tirées de ces relations ne sont plus valables (en particulier, les systèmes « réduits » ($\mathfrak{S}_I^{(S)}$) et ($\mathfrak{S}_I^{(H)}$)).

§ 3. On peut concrétiser les développements précédents en prenant l'exemple d'un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes; dans ce cas, la loi d'état « canonique » a la forme suivante :

$$h = h(p, S) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{S}{k_1}}. \quad (5.32)$$

Les constantes k_1 et γ sont définies par les relations bien connues :

$$k_1 = C_p - C_v, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad (5.33)$$

C_p et C_v étant les chaleurs spécifiques (constantes) du gaz.

Dans ce cas, on a :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial h}{\partial p} = p^{-\frac{1}{\gamma}} e^{\frac{\gamma-1}{\gamma k_1} S}, \quad T = \frac{\partial h}{\partial S} = \frac{1}{k_1} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{\gamma-1}{\gamma k_1} S}, \quad (5.34)$$

d'où l'on déduit aisément :

$$T = \frac{1}{k_1} \frac{p}{\rho}, \quad h = \frac{k_1 \gamma}{\gamma - 1} T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}. \quad (5.35)$$

Donc, les fonctions (5.27) ont les expressions analytiques suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \bar{p} &= \bar{p}(\rho, S) = \rho^\gamma e^{\frac{\gamma-1}{k_1} S} = \rho^\gamma e^{\frac{S}{C_v}}, \\ (b) \quad \bar{h} &= \bar{h}(\rho, S) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} e^{\frac{\gamma-1}{k_1} S}, \\ (c) \quad \bar{T} &= \bar{T}(\rho, S) = \frac{1}{k_1} \rho^{\gamma-1} e^{\frac{\gamma-1}{k_1} S}; \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

on obtient aussi :

$$\bar{a}^2 = \bar{a}^2(\rho, S) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \rho} = \gamma \rho^{\gamma-1} e^{\frac{\gamma-1}{k_1} S} = (\gamma - 1) \bar{h} = k_1 \gamma \bar{T}. \quad (5.37)$$

Pour les écoulements isentropiques ($S = S_0 = \text{const.}$) d'un tel gaz, les expressions précédentes se réduisent aux relations :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad p &= p(\rho) = k_2 \rho^\gamma, \text{ (où : } k_2 = e^{\frac{\gamma-1}{k_1} S_0} \text{),} \\ \text{(b)} \quad h &= h(\rho) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma k_2}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1}, \\ \text{(c)} \quad T &= T(\rho) = \frac{1}{k_1} \frac{p}{\rho} = \frac{k_2}{k_1} \rho^{\gamma-1}, \\ \text{(d)} \quad a^2 &= a^2(\rho) = \frac{dp}{d\rho} = k_2 \gamma \rho^{\gamma-1}; \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

pour ces écoulements la température T peut être définie par la relation (5.38,c), lorsqu'elle n'est pas constante.

Les formules (5.38) donnent facilement les expressions analytiques des fonctions dépendant de l'état thermodynamique du fluide et qui interviennent dans les équations du système « réduit » ($\mathbb{S}_I^{(S)}$).

Ce problème est un peu plus difficile dans le cas des écoulements de classe (C_H) d'un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes, car l'inconnue S intervient dans les relations (5.36) par l'intermédiaire de la fonction exponentielle. Pour simplifier les expressions analytiques des équations du système « réduit » ($\mathbb{S}_I^{(H)}$), on fait, dans ce cas, un changement de fonction du type :

$$\sigma = b' e^{bS}, \quad (5.39)$$

les constantes b et b' étant fixées ultérieurement.

On déduit les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x_i} &= \frac{1}{b\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{b\sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{b\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \frac{\partial \sigma}{\partial x_j}, \\ \text{grad } S &= \frac{1}{b\sigma} \text{grad } \sigma, \quad \Delta S = \frac{1}{b\sigma} \Delta \sigma - \frac{1}{b\sigma^2} |\text{grad } \sigma|^2, \end{aligned} \quad (5.40)$$

où : $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3$;

en introduisant les notations similaires :

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}^{(\sigma)} &\equiv \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } \sigma, \quad W^{(\sigma)} \equiv |\vec{w}^{(\sigma)}|, \\ M^{(\sigma)} &\equiv \text{rot } \vec{w}^{(\sigma)} \cdot \text{grad } \Psi, \quad N^{(\sigma)} \equiv \text{rot } \vec{w}^{(\sigma)} \cdot \text{grad } \sigma, \\ \vec{m}^{(\sigma)} &\equiv (\vec{w}^{(\sigma)} \cdot \nabla) \vec{w}^{(\sigma)}, \quad \xi^{(\sigma)} \equiv \vec{m}^{(\sigma)} \cdot \text{grad } \Psi, \quad \eta^{(\sigma)} \equiv \vec{m}^{(\sigma)} \cdot \text{grad } \sigma, \\ \vec{n}^{(\sigma)} &\equiv \vec{m}^{(\sigma)} \wedge \vec{w}^{(\sigma)}, \quad \alpha^{(\sigma)} \equiv \vec{n}^{(\sigma)} \cdot \text{grad } \Psi, \quad \beta^{(\sigma)} \equiv \vec{n}^{(\sigma)} \cdot \text{grad } \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (5.14'')$$

on trouve les relations de liaison :

$$\left. \begin{aligned} \vec{w} &= \frac{1}{b\sigma} \vec{w}^{(\sigma)}, \quad M^{(H)} = \frac{1}{b\sigma} M^{(\sigma)} - \frac{1}{b\sigma^2} [W^{(\sigma)}]^2, \\ N^{(H)} &= \frac{1}{b^2\sigma^2} N^{(\sigma)}, \quad \xi^{(H)} = \frac{1}{b^2\sigma^2} \xi^{(\sigma)}, \\ \eta^{(H)} &= \frac{1}{b^3\sigma^3} \eta^{(\sigma)}, \quad \alpha^{(H)} = \frac{1}{b^3\sigma^3} \alpha^{(\sigma)}, \quad \beta^{(H)} = \frac{1}{b^4\sigma^4} \beta^{(\sigma)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

Pour les fonctions qui sont définies par les formules (5.14'') on obtient facilement leurs expressions analytiques à l'aide des relations (5.15), en remplaçant partout la fonction $H(x_1, x_2, x_3)$ par la fonction $\sigma(x_1, x_2, x_3)$.

Les deux premières équations du système « réduit » ($\mathbb{S}_I^{(H)}$) peuvent donc s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad N^{(\sigma)} + \frac{1}{a^2 \rho^2 b^2 \sigma^2} \beta^{(\sigma)} &= 0, \\ \text{(B)} \quad M^{(\sigma)} + \frac{1}{a^2 \rho^2 b^2 \sigma^2} \alpha^{(\sigma)} + \left(\frac{1}{a^2 \rho b} \frac{\partial \bar{p}}{\partial S} - 1 \right) \frac{1}{\sigma} [W^{(\sigma)}]^2 &= -b\sigma\rho^2 \bar{T}; \end{aligned}$$

les relations (5.36) et (5.37) donnent les valeurs suivantes pour les expressions intervenues dans ces équations :

$$\left. \begin{aligned} a^2 \rho^2 b^2 \sigma^2 &= b^2 b'^2 \gamma \rho^{\gamma+1} e^{\left(2b + \frac{\gamma-1}{k_1}\right) s}, \\ \frac{1}{a^2 \rho b} \frac{\partial \bar{p}}{\partial S} &= \frac{\gamma-1}{\gamma b k_1}, \\ b\sigma\rho^2 \bar{T} &= \frac{bb'}{k_1} \rho^{\gamma+1} e^{\left(b + \frac{\gamma-1}{k_1}\right) s}. \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

Maintenant, on peut faire plusieurs choix pour les valeurs des constantes b et b' , en essayant ainsi de simplifier (ou de faire disparaître) l'une ou l'autre de ces expressions ; le choix, qui rend ces équations sous la forme analytique la plus simple et la plus symétrique, est le suivant :

$$b = \frac{\gamma-1}{\gamma k_1} = \frac{1}{C_p}, \quad b' = \frac{1}{b\sqrt{\gamma}} = \frac{k_1 \sqrt{\gamma}}{\gamma-1}. \quad (5.43)$$

En effet, la valeur choisie pour b annule le coefficient de $[W^{(\sigma)}]^2$ dans l'équation (B) et la valeur choisie pour b' réduit à l'unité le coefficient constant dans l'expression $a^2 \rho^2 b^2 \sigma^2$; le changement de fonction (5.39) choisi est donc le suivant :

$$\sigma = \frac{k_1 \sqrt{\gamma}}{\gamma-1} e^{\frac{\gamma-1}{k_1 \gamma} s} = \frac{C_p}{\sqrt{\gamma}} e^{\frac{s}{C_p}}, \quad (5.39')$$

et le système « réduit » ($\S^{(H)}$) s'écrit de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} \text{(A)} \quad N^{(\sigma)} + \frac{1}{(\rho\sigma)^{\gamma+1}} \frac{1}{\sigma} \beta^{(\sigma)} &= 0, \\ \text{(B)} \quad M^{(\sigma)} + \frac{1}{(\rho\sigma)^{\gamma+1}} \frac{1}{\sigma} \alpha^{(\sigma)} &= -\frac{1}{k_1 \sqrt{\gamma}} (\rho\sigma)^{\gamma+1}, \\ \text{(C)} \quad \frac{1}{2} [W^{(\sigma)}]^2 + \frac{\gamma^{\gamma/2}}{k_1 C_p^{\gamma+1}} (\rho\sigma)^{\gamma+1} \sigma &= \frac{\bar{h}_0}{C_p^2} (\rho\sigma)^2. \end{aligned} \right\} \quad (\S^{(H)})$$

§ 4. Lorsqu'on veut construire des classes de solutions « formelles » des systèmes « réduits » établis précédemment, on peut suivre la même voie que dans les deux premiers paragraphes du chapitre antérieur; en effet, pour chacun de ces systèmes « réduits » on peut reprendre l'analyse détaillée faite dans le cas du système (§) (voir Ch. IV, § 1), en retrouvant ainsi, dans chaque cas, le même type de problèmes, de conditions et de conséquences.

On introduit donc des changements de fonctions du type (4.1), c'est-à-dire ayant la forme suivante :

$$\Psi = L(\Psi_0, H_0), \quad H = K(\Psi_0, H_0) \quad \text{— dans le cas } (C_S) \text{ —}, \quad (5.44)$$

et

$$\Psi = \mathcal{L}(\Psi_0, S_0), \quad S = \mathcal{K}(\Psi_0, S_0) \quad \text{— dans le cas } (C_H) \text{ —}, \quad (5.45)$$

en mettant ainsi en évidence la dépendance des fonctions inconnues initiales par rapport à une paire arbitraire de « paramètres » définissant la famille de lignes de courant; un tel changement de fonctions n'agit que sur les fonctions inconnues qui interviennent par leurs dérivées partielles dans les équations de ces systèmes « réduits ». Les raisons, qui nous ont obligé à éliminer — dans les équations de ces systèmes « réduits » — les dérivées partielles de la masse spécifique ρ par rapport aux variables d'espace x_1, x_2, x_3 , sont mieux expliquées à partir d'ici.

En ce qui concerne ces changements de fonctions et les fonctions inconnues introduites, on garde toutes les conditions et toutes les précisions données précédemment dans l'étude du cas similaire (§) (voir Ch. IV, § 1); en particulier, on signale le cas où les deux « paramètres » définissant la famille de lignes de courant varient « d'une manière strictement indépendante » par rapport aux variables cartésiennes orthogonales (x_i):

$$\text{grad } \Psi_0 \cdot \text{grad } H_0 \equiv 0 \quad \text{— dans le cas } (C_S) \text{ —}, \quad (5.46)$$

et

$$\text{grad } \Psi_0 \cdot \text{grad } S_0 \equiv 0 \quad \text{— dans le cas } (C_H) \text{ —}, \quad (5.46')$$

ce cas étant envisagé plus loin.

On introduit les notations analogues :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad \vec{w}_0 &= \text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0, \quad W_0 = |\vec{w}_0|, \\ J &= \frac{D(L, K)}{D(\Psi_0, H_0)}, \quad P^{(S)} = \frac{\partial J}{\partial \Psi_0}, \quad Q^{(S)} = \frac{\partial J}{\partial H_0}, \\ \text{(b)} \quad \vec{w}_0 &= \text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } S_0, \quad W_0 = |\vec{w}_0|, \\ \mathfrak{J} &= \frac{D(\mathfrak{L}, \mathfrak{K})}{D(\Psi_0, S_0)}, \quad P^{(H)} = \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \Psi_0}, \quad Q^{(H)} = \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial S_0}, \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

et l'on obtient aisément des relations similaires aux relations (4.4), (4.5), (4.7) et respectivement (4.8).

Pour les expressions, qui sont définies par des formules du type (5.14) et (5.14') par rapport aux nouvelles fonctions inconnues, on garde les mêmes notations, en ajoutant seulement l'indice inférieur zéro pour que ce remplacement soit précisé; des calculs simples donnent les relations de transformation de ces expressions par rapport aux changements de fonctions (5.44) et respectivement (5.45). On obtient :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad M^{(S)} &= J \left(M_0^{(S)} \frac{\partial L}{\partial \Psi_0} + N_0^{(S)} \frac{\partial L}{\partial H_0} \right) + W_0^2 \left(Q^{(S)} \frac{\partial L}{\partial \Psi_0} - P^{(S)} \frac{\partial L}{\partial H_0} \right), \\ \text{(b)} \quad N^{(S)} &= J \left(M_0^{(S)} \frac{\partial K}{\partial \Psi_0} + N_0^{(S)} \frac{\partial K}{\partial H_0} \right) + W_0^2 \left(Q^{(S)} \frac{\partial K}{\partial \Psi_0} - P^{(S)} \frac{\partial K}{\partial H_0} \right), \\ \text{(c)} \quad \xi^{(S)} &= J^2 \left(\xi_0^{(S)} \frac{\partial L}{\partial \Psi_0} + \eta_0^{(S)} \frac{\partial L}{\partial H_0} \right), \quad \eta^{(S)} = J^2 \left(\xi_0^{(S)} \frac{\partial K}{\partial \Psi_0} + \eta_0^{(S)} \frac{\partial K}{\partial H_0} \right), \\ \text{(d)} \quad \alpha^{(S)} &= J^3 \left(\alpha_0^{(S)} \frac{\partial L}{\partial \Psi_0} + \beta_0^{(S)} \frac{\partial L}{\partial H_0} \right), \quad \beta^{(S)} = J^3 \left(\alpha_0^{(S)} \frac{\partial K}{\partial \Psi_0} + \beta_0^{(S)} \frac{\partial K}{\partial H_0} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

dans le cas (C_S) et respectivement :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad M^{(H)} &= \mathfrak{J} \left(M_0^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi_0} + N_0^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial S_0} \right) + W_0^2 \left(Q^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi_0} - P^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial S_0} \right), \\ \text{(b)} \quad N^{(H)} &= \mathfrak{J} \left(M_0^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \Psi_0} + N_0^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial S_0} \right) + W_0^2 \left(Q^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \Psi_0} - P^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial S_0} \right), \\ \text{(c)} \quad \xi^{(H)} &= \mathfrak{J}^2 \left(\xi_0^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi_0} + \eta_0^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial S_0} \right), \quad \eta^{(H)} = \mathfrak{J}^2 \left(\xi_0^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \Psi_0} + \eta_0^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial S_0} \right), \\ \text{(d)} \quad \alpha^{(H)} &= \mathfrak{J}^3 \left(\alpha_0^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi_0} + \beta_0^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial S_0} \right), \quad \beta^{(H)} = \mathfrak{J}^3 \left(\alpha_0^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \Psi_0} + \beta_0^{(H)} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial S_0} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.48')$$

dans le cas (C_H).

Ces relations permettent de récrire directement les deux premières équations de chacun des systèmes « réduits » trouvés, en les exprimant par rapport aux nouvelles fonctions inconnues; on trouve ainsi la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \text{(A)} \quad & \left(JM_0^{(S)} + Q^{(S)} W_0^2 + \frac{J^3 \alpha_0^{(S)}}{a^2 \rho^2} \right) \frac{\partial K}{\partial \Psi_0} + \\ & + \left(JN_0^{(S)} - P^{(S)} W_0^2 + \frac{J^3 \beta_0^{(S)}}{a^2 \rho^2} \right) \frac{\partial K}{\partial H_0} = 0, \\ \text{(B)} \quad & \left(JM_0^{(S)} + Q^{(S)} W_0^2 + \frac{J^3 \alpha_0^{(S)}}{a^2 \rho^2} \right) \frac{\partial L}{\partial \Psi_0} + \\ & + \left(JN_0^{(S)} - P^{(S)} W_0^2 + \frac{J^3 \beta_0^{(S)}}{a^2 \rho^2} \right) \frac{\partial L}{\partial H_0} = \rho^2, \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

pour les deux premières équations du système « réduit » ($\mathbb{S}_I^{(S)}$) et respectivement la forme :

$$\left. \begin{aligned} \text{(A)} \quad & \left(\mathfrak{J} M_0^{(H)} + Q^{(H)} \mathfrak{W}_0^2 + \frac{\mathfrak{J}^3 \alpha_0^{(H)}}{a^2 \rho^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \Psi_0} + \\ & + \left(\mathfrak{J} N_0^{(H)} - P^{(H)} \mathfrak{W}_0^2 + \frac{\mathfrak{J}^3 \beta_0^{(H)}}{a^2 \rho^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial S_0} = 0, \\ \text{(B)} \quad & \left(\mathfrak{J} M_0^{(H)} + Q^{(H)} \mathfrak{W}_0^2 + \frac{\mathfrak{J}^3 \alpha_0^{(H)}}{a^2 \rho^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi_0} + \\ & + \left(\mathfrak{J} N_0^{(H)} - P^{(H)} \mathfrak{W}_0^2 + \frac{\mathfrak{J}^3 \beta_0^{(H)}}{a^2 \rho^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial S_0} = -\rho^2 \bar{T} - \frac{\mathfrak{J}^2 \mathfrak{W}_0^2}{a^2 \rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial S}, \end{aligned} \right\} \quad (5.49')$$

pour les deux premières équations du système « réduit » ($\mathbb{S}_I^{(H)}$).

Si l'on suppose que $J \neq 0$, et respectivement $\mathfrak{J} \neq 0$, partout dans le domaine de l'écoulement considéré — condition imposée par l'existence des changements de fonctions (5.44) et respectivement (5.45) —, alors les deux systèmes précédents peuvent encore s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \text{(A)} \quad & J^2 M_0^{(S)} + \frac{W_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial H_0} (J^2) + \frac{J^4 \alpha_0^{(S)}}{a^2 \rho^2} = \rho^2 \frac{\partial K}{\partial H_0}, \\ \text{(B)} \quad & J^2 N_0^{(S)} - \frac{W_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial \Psi_0} (J^2) + \frac{J^4 \beta_0^{(S)}}{a^2 \rho^2} = -\rho^2 \frac{\partial K}{\partial \Psi_0}, \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

et respectivement :

$$\left. \begin{aligned} \text{(A)} \quad & \mathfrak{J}^2 M_0^{(H)} + \frac{\mathfrak{W}_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial S_0} (\mathfrak{J}^2) + \frac{\mathfrak{J}^4 \alpha_0^{(H)}}{a^2 \rho^2} = -\left(\rho^2 \bar{T} + \frac{\mathfrak{W}_0^2 \mathfrak{J}^2}{a^2 \rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial S} \right) \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial S_0}, \\ \text{(B)} \quad & \mathfrak{J}^2 N_0^{(H)} - \frac{\mathfrak{W}_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial \Psi_0} (\mathfrak{J}^2) + \frac{\mathfrak{J}^4 \beta_0^{(H)}}{a^2 \rho^2} = \left(\rho^2 \bar{T} + \frac{\mathfrak{W}_0^2 \mathfrak{J}^2}{a^2 \rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial S} \right) \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \Psi_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.50')$$

On s'aperçoit que les premiers membres des équations (A) et respectivement (B) ont, dans les deux cas, les mêmes expressions analytiques par rapport aux deux «paramètres» qui définissent la famille de lignes de courant.

Naturellement, toutes les relations et toutes les fonctions trouvées dans ce paragraphe ont été exprimées par rapport aux variables cartésiennes orthogonales x_1, x_2, x_3 , en tenant compte des changements de fonctions (5.44) ou (5.45).

Mais, pour les mêmes raisons qu'au (Ch. IV 1§ et 2§) et sans revenir sur les remarques et sur les précisions données là, on introduit le système de coordonnées curvilignes T_v^- , qui est défini par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{p}_1^* &= t(x_1, x_2, x_3), \bar{p}_2^* = \Psi_0(x_1, x_2, x_3) = L_0(\Psi, H), \\ \bar{p}_3^* &= H_0(x_1, x_2, x_3) = K_0(\Psi, H),\end{aligned}\quad (5.51)$$

dans le cas (C_s), et par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{p}_1^* &= t(x_1, x_2, x_3), \bar{p}_2^* = \Psi_0(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{E}_0(\Psi, S), \\ \bar{p}_3^* &= S_0(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{K}_0(\Psi, S),\end{aligned}\quad (5.51')$$

dans le cas (C_H); pour préciser la dépendance de chaque fonction introduite par rapport aux nouvelles variables, on ajoutera le signe* à son symbole initial ($M_0^{*(S)}$, $M_0^{*(H)}$, etc. ...,).

Maintenant, tous les résultats, qui ont été obtenus au Ch. IV concernant la construction des classes de solutions «génératrices» du système «réduit», peuvent être étendus aux classes d'écoulements (C_s) et (C_H); on donnera brièvement les résultats analogues seulement dans le cas (C_s), pour ne pas prolonger davantage ce travail.

Considérons premièrement le cas similaire à celui donné par le Théorème XIII; si le changement de fonctions (5.44) est tel que :

$$J \equiv C_0 \text{ (const.)} \quad (5.52)$$

— on peut toujours prendre $C_0 = 1$ —, alors le système d'équations (5.50) s'écrit sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \text{(A)} \quad M_0^{*(S)} + \frac{\alpha_0^{*(S)}}{a^{*2} \rho^{*2}} &= \rho^{*2} \frac{\partial K}{\partial H_0}, \\ \text{(B)} \quad N_0^{*(S)} + \frac{\beta_0^{*(S)}}{a^{*2} \rho^{*2}} &= -\rho^{*2} \frac{\partial K}{\partial \Psi_0}, \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

dans le système de coordonnées curvilignes T_v^- .

Supposons que les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ sont choisies telles que :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad N_0^* &= 0, \\ \text{(b)} \quad \beta_0^* &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

en tous les points de chaque domaine (Δ_i) ; cette hypothèse est équivalente à la suivante :

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad N_0 = 0, \\ (b) \quad \beta_0 = 0, \end{array} \right\} \text{ dans } (\mathfrak{D}), \quad (5.54')$$

et elle est l'analogie de la condition (4.16) — Voir Ch. IV, §2 —.

Dans ce cas, on peut considérer l'une des possibilités suivantes :

a) Le système (5.54') donne deux équations indépendantes, auxquelles doivent satisfaire les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$; dans ce cas, les équations (5.53, A) et $(\mathfrak{S}_1^{(S)}. C)$ donnent les fonctions $K(H_0)$ et ρ' , qui correspondent à la classe choisie de solutions « formelles » (Ψ_0, H_0) du système (5.54'). On retrouve ainsi la classe de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » $(\mathfrak{S}_1^{(S)})$, qui a été définie précédemment (Ch. IV, § 2) par les relations (4.18) et (4.19); dans ces relations il reste seulement $B(H_0)$ non déterminée, mais elle n'est pas une fonction essentiellement arbitraire pour le problème envisagé.

b) L'une des équations (5.54') est identiquement vérifiée par la classe de fonctions (Ψ_0, H_0) choisie; dans ce cas, l'autre équation (5.54') et les équations (5.53, A), $(\mathfrak{S}_1^{(S)}. C)$ doivent déterminer quatre fonctions inconnues.

La classe correspondante de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » $(\mathfrak{S}_1^{(S)})$ est encore celle définie par les relations (4.18) et (4.19), mais elle dépend cette fois d'une fonction essentiellement arbitraire — soit $K(H_0)$, soit ρ' , soit l'une des fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, $H_0(x_1, x_2, x_3)$ —; il faut donc donner l'expression analytique de cette fonction arbitraire pour déterminer entièrement cette classe.

c) Les deux conditions (5.54') sont identiquement vérifiées par la classe de fonctions (Ψ_0, H_0) choisie; c'est le cas, par exemple, des écoulements plans et des écoulements à symétrie axiale (de la classe (C_S)), comme on le verra en détail au chapitre suivant.

Dans ce cas, il ne reste que les équations (5.53, A) et $(\mathfrak{S}_1^{(S)}. C)$ pour déterminer quatre fonctions inconnues; la classe correspondante de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » $(\mathfrak{S}_1^{(S)})$ est également celle définie par les relations (4.18) et (4.19), mais elle dépend cette fois de deux fonctions essentiellement arbitraires.

Le résultat obtenu peut donc être formulé de même façon qu'au chapitre IV :

THÉOREME XIX. *Lorsque les conditions (5.52) et (5.54') sont remplies, les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ forment une classe de solutions « génératrices » du système « réduit » $(\mathfrak{S}_1^{(S)})$ si, et seulement si, elles vérifient également les équations (5.53, A) et $(\mathfrak{S}_1^{(S)}. C)$. La classe correspondante de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » $(\mathfrak{S}_1^{(S)})$ est nécessairement définie par les relations (4.18) et (4.19); le nombre de fonctions essentiellement arbitraires, qui y interviennent, dépend du caractère des conditions (5.54') par rapport à la classe de fonctions (Ψ_0, H_0) choisie.*

On s'aperçoit aisément que la correspondance biunivoque, entre les classes de fonctions (Ψ, H) et (Ψ_0, H_0) ainsi obtenues, ne peut s'établir que dans le dernier cas considéré précédemment, quand les conditions (5.54') sont identiquement vérifiées.

Les mêmes raisons qu'au Chapitre IV conduisent à la recherche d'un résultat similaire au Théorème XIV; dans ce but, il faut établir une condition de compatibilité analogue à (4.12) et il faut également préciser le caractère de la dépendance de ρ^* par rapport aux variables introduites $\bar{p}_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Prenons donc l'équation $(\mathcal{S}_I^{(S)} \cdot C)$ sous la forme différentielle :

$$\frac{a^{*2}(\rho^*)}{\rho^*} d\rho^* + d\left(\frac{J^2 W_0^{*2}}{2\rho^{*2}}\right) = dK; \quad (5.55)$$

cette relation donne le système suivant :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \left(a^{*2} - \frac{J^2 W_0^{*2}}{\rho^{*2}}\right) \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{J^2}{\rho^{*2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{W_0^{*2}}{2}\right) = 0, \\ (b) \quad & \left(a^{*2} - \frac{J^2 W_0^{*2}}{\rho^{*2}}\right) \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial \Psi_0} + \frac{J^2}{\rho^{*2}} \frac{\partial}{\partial \Psi_0} \left(\frac{W_0^{*2}}{2}\right) + \frac{W_0^{*2}}{2\rho^{*2}} \frac{\partial}{\partial \Psi_0} (J^2) = \frac{\partial K}{\partial \Psi_0}, \\ (c) \quad & \left(a^{*2} - \frac{J^2 W_0^{*2}}{\rho^{*2}}\right) \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial H_0} + \frac{J^2}{\rho^{*2}} \frac{\partial}{\partial H_0} \left(\frac{W_0^{*2}}{2}\right) + \frac{W_0^{*2}}{2\rho^{*2}} \frac{\partial}{\partial H_0} (J^2) = \frac{\partial K}{\partial H_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

On introduit le paramètre habituel :

$$\mathfrak{N} = \frac{V}{a} = \frac{J W_0}{a \rho} \quad (\text{le nombre de MACH}) \quad (5.57)$$

et on récrit le système d'équations (5.50) en tenant compte de (5.56) et (5.57) :

$$\left. \begin{aligned} (A) \quad & M_0^{*(S)} - \frac{\partial}{\partial H_0} \left(\frac{W_0^{*2}}{2}\right) + \frac{J^2 \alpha_0^{*(S)}}{a^{*2} \rho^{*2}} = \frac{(1 - \mathfrak{N}^{*2}) W_0^{*2}}{\mathfrak{N}^{*2} \rho^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial H_0}, \\ (B) \quad & N_0^{*(S)} + \frac{\partial}{\partial \Psi_0} \left(\frac{W_0^{*2}}{2}\right) + \frac{J^2 \beta_0^{*(S)}}{a^{*2} \rho^{*2}} = \frac{-(1 - \mathfrak{N}^{*2}) W_0^{*2}}{\mathfrak{N}^{*2} \rho^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial \Psi_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.58)$$

Il en résulte la condition de compatibilité suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_0^{*(S)}}{\partial \Psi_0} + \frac{\partial N_0^{*(S)}}{\partial H_0} + \frac{\mathfrak{N}^{*2}}{W_0^{*2}} \left(\frac{\partial \alpha_0^{*(S)}}{\partial \Psi_0} + \frac{\partial \beta_0^{*(S)}}{\partial H_0} \right) + \alpha_0^{*(S)} \frac{\partial}{\partial \Psi_0} \left(\frac{\mathfrak{N}^{*2}}{W_0^{*2}} \right) + \\ & + \beta_0^{*(S)} \frac{\partial}{\partial H_0} \left(\frac{\mathfrak{N}^{*2}}{W_0^{*2}} \right) = \frac{1}{\rho^*} \left[\frac{\partial \rho^*}{\partial H_0} \frac{\partial}{\partial \Psi_0} \left(\frac{W_0^{*2}}{\mathfrak{N}^{*2}} \right) - \frac{\partial \rho^*}{\partial \Psi_0} \frac{\partial}{\partial H_0} \left(\frac{W_0^{*2}}{\mathfrak{N}^{*2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Supposons que les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ satisfont aux conditions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad N_0^{(S)} &= 0, \quad \beta_0^{(S)} = 0, \\ (b) \quad \frac{\partial M_0^{(S)}}{\partial \Psi_0} &\equiv 0, \quad \frac{\partial W_0^{(S)}}{\partial \Psi_0} \equiv 0, \quad \frac{\partial \alpha_0^{(S)}}{\partial \Psi_0} \equiv 0, \end{aligned} \right\} \quad (\mathfrak{C}^{(S)})$$

en tous les points de chaque domaine (Δ_i^*) — pour la fonction $t(x_1, x_2, x_3)$ choisie ; elles sont les analogues des conditions $(\mathfrak{C}^*)$ du cas (C_1) , toutes les remarques et toutes les précisions données sur ce sujet au (Ch. IV, §2) étant directement transposables ici. En particulier, les conditions $(\mathfrak{C}^{(S)}. a)$ sont équivalentes aux suivantes :

$$(\mathfrak{C}^{(S)}. a) \quad N_0^{(S)} = 0, \quad \beta_0^{(S)} = 0, \quad - \text{ dans } (\mathfrak{D}) -$$

et l'on peut envisager les trois possibilités données précédemment, dans le cas des conditions (5.54').

Si $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction « strictement indépendante » par rapport à chacune des fonctions $H_0(x_1, x_2, x_3)$ et $t(x_1, x_2, x_3)$, alors les conditions $(\mathfrak{C}^{(S)}. b)$ expriment la propriété que chacune des fonctions $M_0(x_1, x_2, x_3)$, $W_0(x_1, x_2, x_3)$, $\alpha_0(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction « strictement indépendante » par rapport à $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$.

Si les conditions $(\mathfrak{C}^{(S)})$ sont remplies, l'équation (5.58, B) montre que :

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial \Psi_0} \equiv 0, \quad \rho^* \equiv \rho^*(t, H_0), \quad (5.60)$$

dans les régions de chaque domaine (Δ_i^*) où l'écoulement envisagé est rotationnel et supersonique ou subsonique.

Dans ce cas, la condition de compatibilité (4.59) se réduit à la suivante :

$$\frac{\alpha_0^{(S)}}{W_0^{*2}} \frac{\partial}{\partial \Psi_0} (\mathfrak{N}^{*2}) = \frac{W_0^{*2}}{\rho^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial H_0} \frac{\partial}{\partial \Psi_0} \left(\frac{1}{\mathfrak{N}^{*2}} \right),$$

qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \mathfrak{N}^*}{\partial \Psi_0} \left[\frac{\alpha_0^{(S)}}{W_0^{*2}} - \frac{W_0^{*2}}{\rho^* \mathfrak{N}^{*2}} \frac{\partial \rho^*}{\partial H_0} \right] = 0.$$

Cette dernière condition est remplie soit lorsqu'on a :

$$\frac{\partial \mathfrak{N}^*}{\partial \Psi_0} \equiv 0, \quad (5.61)$$

soit lorsqu'on a :

$$\alpha_0^{(S)} = \frac{W_0^{*4}}{\rho^* \mathfrak{N}^{*2}} \frac{\partial \rho^*}{\partial H_0}; \quad (5.61')$$

mais on s'aperçoit que les conditions $(\mathfrak{C}^{(S)}. b)$, (5.60) et (5.61') conduisent encore à (5.61). Par conséquent, la condition (5.61) est toujours remplie et il en résulte :

$$\frac{\partial J}{\partial \Psi_0} \equiv 0. \quad (5.62)$$

Naturellement, la classe de fonctions (Ψ_0, H_0) définie par les conditions $(\mathfrak{G}^{(S)})$ doit aussi vérifier les équations (5.50, A) — ou (5.58, A) — et $(\mathfrak{S}_I^{(S)} \cdot C)$, pour constituer une classe de solutions «génératrices» du système «réduit» $(\mathfrak{S}_I^{(S)})$. La classe correspondante de solutions «formelles» (Ψ, H) du système «réduit» $(\mathfrak{S}_I^{(S)})$ est définie par les relations (4.25) et (4.26). L'introduction de la classe de solutions «génératrices» $(\Psi_0, \widetilde{H}_0)$ s'effectue ici de la même manière que dans le cas analogue du Ch. IV, §2, et on obtient le même type de résultats.

Finalement, on peut formuler le théorème suivant :

THÉORÈME XX. *Si les fonctions $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, $H_0(x_1, x_2, x_3)$ satisfont aux conditions $(\mathfrak{G}^{(S)})$, alors :*

1° *Ces fonctions peuvent constituer une classe de solutions «génératrices» du système «réduit» $(\mathfrak{S}_I^{(S)})$ lorsqu'elles satisfont également aux équations (5.50, A), $(\mathfrak{S}_I^{(S)} \cdot C)$, et seulement dans ce cas.*

2° *Si la condition précédente est satisfaite, la classe correspondante de solutions «formelles» (Ψ, H) du système «réduit» $(\mathfrak{S}_I^{(S)})$ est nécessairement celle définie par les relations (4.25) et (4.26); le nombre de fonctions essentiellement arbitraires, qui y interviennent, dépend du caractère des conditions $(\mathfrak{G}^{(S)} \cdot a)$ par rapport à la classe de fonctions (Ψ_0, H_0) choisie.*

3° *La fonction arbitraire $J(H_0)$ permet toujours de remplacer la classe de fonctions (Ψ_0, H_0) par la classe de fonctions $(\Psi_0, \widetilde{H}_0)$, $\widetilde{H}_0$ étant la fonction définie par la relation (4.27). La classe de fonctions $(\Psi_0, \widetilde{H}_0)$ vérifie également les conditions $(\mathfrak{G}^{(S)})$ et elle conduit nécessairement à la classe de solutions «formelles» (Ψ, H) du système «réduit» $(\mathfrak{S}_I^{(S)})$, qui est définie par les relations (4.18) et (4.19).*

Pour étudier les écoulements de ce type, il suffit de déterminer la classe correspondante de solutions «génératrices» $(\Psi_0, \widetilde{H}_0)$.

Enfin, on observe qu'on peut établir une correspondance biunivoque entre les classes de fonctions (Ψ, H) et $(\Psi_0, \widetilde{H}_0)$ ainsi obtenues, seulement lorsque les conditions $(\mathfrak{G}^{(S)} \cdot a)$ sont identiquement vérifiées.

CHAPITRE VI

A. Écoulements «bidimensionnels de classe (C_S^P) »

§1. Dans cette section on envisagera quelques applications immédiates du Théorème XX en suivant la même voie qu'au quatrième chapitre; plus précisément, notre but est d'étendre les résultats obtenus au Ch. IV, §§ 3—7, aux écoulements de la classe (C_S) . Le même type de résultats peut être également retrouvé pour les écoulements de la classe (C_H) .

Considérons la classe de fonctions (Ψ_0, H_0) définie par les relations (4.33); on cherchera donc les écoulements de la classe (C_s) caractérisés par les deux propriétés suivantes :

a) Les deux « paramètres » $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ définissant la famille de lignes de courant varient « d'une manière strictement indépendante » par rapport aux variables cartésiennes orthogonales x_1, x_2, x_3 , dans le domaine $(\mathfrak{D})$ de l'écoulement.

b) L'un de ces « paramètres » — disons Ψ_0 — est une fonction linéaire par rapport aux variables x_1, x_2, x_3 .

La remarque faite au Ch. IV, § 3 permet de prendre cette classe de fonctions (Ψ_0, H_0) sous la forme (4.32).

Les relations (5.15, b), (5.15, c) et (5.15, e) montrent que cette classe de fonctions (Ψ_0, H_0) vérifient identiquement les deux conditions $(\mathfrak{T}^{(S)}. a)$; les relations (5.15, a), (5.15, c) et (5.15, d) donnent, dans ce cas, les valeurs suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad W_0^2 &= \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2 = |\text{grad } H_0|^2, \\ (b) \quad M_0^{(S)} &= \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_2^2} = \Delta H_0, \\ (c) \quad \alpha_0^{(S)} = \eta_0^{(S)} &= - \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1 \partial x_2} - \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Ces relations montrent directement que les trois conditions $(\mathfrak{T}^{(S)}. b)$ sont identiquement vérifiées dans ce cas, pour tout « paramètre » $t = t(x_1, x_2)$ — qui est une fonction « strictement indépendante » par rapport à la fonction $\Psi_0 = x_3$ choisie —.

Par conséquent, lorsque la fonction « temps » t — ou tout autre paramètre ξ définissant la position d'une particule fluide sur chaque ligne de courant — est « la même » dans chaque plan $x_3 = \text{const.}$, les conditions $(\mathfrak{T}^{(S)})$ sont identiquement vérifiées par la classe de fonctions (Ψ_0, H_0) définie par (4.32), et le Théorème XX peut être appliqué; cette classe de fonctions (Ψ_0, H_0) constitue donc une classe de solutions « génératrices » du système « réduit » $(\mathfrak{S}_I^{(S)})$ si, et seulement si, elle satisfait également aux équations (5.50, A) et $(\mathfrak{S}_I^{(S)}. C)$.

Dans ce cas, l'équation (5.50, A) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \left[a^2 \rho^2 - \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ & + \left[a^2 \rho^2 - \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_2^2} = a^2 \rho^4 \frac{dK}{dH_0}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

ou encore :

$$\left(1 - \frac{v_1^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2} - 2 \frac{v_1 v_2}{a^2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(1 - \frac{v_2^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_2^2} = \rho^2 \frac{dK}{dH_0}, \quad (6.2')$$

en tenant compte des valeurs (6.1) et du fait qu'on peut toujours prendre $J \equiv 1$. Rappelons que v_1 et v_2 désignent les composantes de la vitesse :

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho} \vec{v}_0 = \frac{1}{\rho} \text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0, \quad (J \equiv 1)$$

selon les axes Ox_1 et respectivement Ox_2 du système cartésien orthogonal T_x .

Les discriminants des équations (6.2) et (6.2') ont respectivement les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2 - \left[a^2 \rho^2 - \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2 \right] \left[a^2 \rho^2 - \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 \right] = \\ & = a^2 \rho^2 \left[\left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2 - a^2 \rho^2 \right] = a^4 \rho^4 \left(\frac{V^2}{a^2} - 1 \right) = a^4 \rho^4 (\mathfrak{M}^2 - 1), \end{aligned} \quad (6.3)$$

et

$$\frac{v_1^2 v_2^2}{a^4} - \left(1 - \frac{v_1^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{a^2}\right) = \frac{V^2}{a^2} - 1 = \mathfrak{M}^2 - 1, \quad (6.3')$$

où :

$$V = \left| \frac{\vec{v}}{a} \right| \quad \text{et} \quad \mathfrak{M} = \frac{V}{a} \quad (\text{le nombre de MACH}).$$

Par suite, ces équations sont du type elliptique quand $\mathfrak{M} < 1$ et du type hyperbolique quand $\mathfrak{M} > 1$.

L'équation $(S_I^{(S)} \cdot C)$ prend, dans ce cas, la forme suivante :

$$\int \frac{a^2}{\rho} d\rho + \frac{1}{2\rho^2} \left[\left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2 \right] = K(H_0), \quad (6.4)$$

ou encore :

$$\rho^2 h(\rho) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2 \right] = \rho^2 K(H_0). \quad (6.4')$$

On dispose donc de deux équations — (6.2) et (6.4) — pour déterminer trois fonctions inconnues : $H_0(x_1, x_2, x_3)$, $\rho(x_1, x_2, x_3)$, $H(x_1, x_2, x_3) = K(H_0)$; on a donné l'expression analytique d'une des fonctions inconnues initiales — $\Psi_0 = x_3$ —, mais il reste encore une fonction arbitraire dans ce problème. L'explication se trouve — de façon analogue qu'au cas précédent (voir Ch. IV, §3) — dans le fait que la classe de fonctions (4.32) a vérifié identiquement les deux conditions $(\mathfrak{G}^* \cdot a)$.

En vertu du Théorème XX, la classe correspondante de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » $(\mathcal{S}_1^{(S)})$ est nécessairement celle définie par les relations suivantes :

$$\Psi = A(H_0) x_3 + B(H_0), \quad H = K(H_0), \quad (6.5)$$

et

$$A(H_0) \frac{dK}{dH_0} \equiv 1; \quad (6.6)$$

elle dépend d'une seule fonction essentiellement arbitraire pour notre problème — $A(H_0)$ ou $K(H_0)$ —.

On démontre facilement que cette classe de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) conduit aux écoulements plans et rotationnels de classe (C_S) et qu'une correspondance biunivoque peut s'établir entre ces écoulements et cette classe de solutions « génératrices » du système « réduit » $(\mathcal{S}_1^{(S)})$; ces démonstrations se font de la même façon qu'au cas analogue du Ch. IV, §3.

On obtient donc le résultat suivant :

THÉORÈME XXI. *Les écoulements plans et rotationnels de classe (C_S) sont caractérisés par la classe de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) du système « réduit » $(\mathcal{S}_1^{(S)})$, définie par les conditions (4.33), (6.2) et (6.4); la correspondance qui existe entre ces écoulements et cette classe de solutions « génératrices » est biunivoque.*

Ce résultat et le Théorème XX assurent l'existence d'une correspondance similaire entre ces écoulements et la classe de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » $(\mathcal{S}_1^{(S)})$, qui est définie par les relations (6.5) et (6.6); une telle correspondance biunivoque peut s'établir, parce que les deux conditions $(\mathcal{C}^{(S)}.a)$ sont identiquement vérifiées dans ce cas.

Pour les composantes de la vitesse $\vec{v}$ selon les axes du système cartésien orthogonal T_x , on en déduit directement les valeurs suivantes :

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \Lambda \frac{dK}{dH_0} \frac{\partial H_0}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_0}{\partial x_2}, \\ v_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \Lambda \frac{dK}{dH_0} \frac{\partial H_0}{\partial x_2} = +\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_0}{\partial x_1}, \\ v_3 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

il en résulte :

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2), \quad \Lambda = \frac{\text{grad } \Phi \cdot \text{grad } H}{|\text{grad } H|^2} = \Lambda(x_1, x_2). \quad (6.8)$$

Par conséquent, la fonction « potentielle » Φ et la fonction de « tourbillon » Λ sont des fonctions « strictement indépendantes » par rapport à la fonction $\Psi_0 = x_3$; la fonction H_0 joue ici le rôle de la « fonction de courant » utilisée habituellement.

Enfin, pour les composantes ω_{x_i} ($i = 1, 2, 3$) du tourbillon $\vec{\omega}$, on trouve les valeurs suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_1} &\equiv 0, \quad \omega_{x_2} \equiv 0, \\ \omega_{x_3} &= \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{dK}{dH_0} \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} - \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \right) = \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} H_0 \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

en utilisant les relations (6.7); un calcul simple, qui tient compte des équations (5.5) et (6.2'), conduit à une nouvelle expression de la composante ω_{x_3} :

$$\omega_{x_3} = \rho \frac{dK}{dH_0}. \quad (6.9')$$

Les relations (6.9) et (6.9') donnent :

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} H_0 \right) = \rho \frac{dK}{dH_0} \quad (6.10)$$

et

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} - \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = \rho. \quad (6.11)$$

L'équation (6.10) est équivalente à l'équation (6.2') et elle peut la remplacer; l'équation (6.11) et les relations (2.25) et (6.8) — qui concernent la fonction Λ — conduisent à l'équation suivante :

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial t}{\partial x_2} - \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial t}{\partial x_1} = \rho, \quad (6.11')$$

rattachant les fonctions H_0 , t et ρ .

On en déduit encore la relation suivante :

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} \right)^2 \right] = \rho V^2, \quad (6.12)$$

qui est l'analogie de (4.45).

Si l'on pose :

$$\tilde{\Lambda} = -\Lambda \frac{dK}{dH_0}, \quad \tilde{H}_0 = -H_0, \quad \tilde{\Phi} = \Phi - H_0 \Lambda \frac{dK}{dH_0}, \quad (6.13)$$

alors les deux premières équations du système (6.7) peuvent s'écrire soit sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial x_2} &= -\tilde{H}_0 \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial x_1} &= -\tilde{H}_0 \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial x_2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

soit sous la forme équivalente :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= \tilde{\Lambda} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial x_1} + \tilde{\Lambda} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.14')$$

On introduit les fonctions suivantes de la variable complexe $\zeta = x_1 + i x_2$:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad F_1(\zeta) &= \tilde{\Phi} + i \tilde{H}_0 = \left(\Phi - \Lambda H_0 \frac{dK}{dH_0} \right) - i H_0, \\ (b) \quad F_2(\zeta) &= \Phi + i \tilde{H}_0 = \Phi - i H_0, \\ (c) \quad w(\zeta) &= v_1 - i v_2 = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} + i \frac{\partial H_0}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

En tenant compte des résultats dus à L. BERS, cités dans la section B du premier chapitre, on déduit aisément que $F_1(\zeta)$ est « une fonction pseudoanalytique de première espèce » par rapport au système d'équations (6.14) et que $F_2(\zeta)$ est « une fonction pseudoanalytique de deuxième espèce » par rapport au système d'équations (6.14'), dans la région subsonique de l'écoulement considéré.

On dira, de même façon qu'au Ch. IV, §4, que :

$F_1(\zeta)$ est « le potentiel complexe de première espèce »,

$F_2(\zeta)$ est « le potentiel complexe de deuxième espèce » et

$w(\zeta)$ est « la vitesse complexe », des écoulements plans de classe (C_s) .

Les dérivées complexes des « potentiels complexes » $F_1(\zeta)$ et $F_2(\zeta)$ sont données par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_1}{d\zeta} &= \frac{\rho + 1}{2} w(\zeta) - \frac{\tilde{H}_0}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial x_1} - i \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial x_2} \right), \\ \frac{dF_2}{d\zeta} &= \frac{1}{2} [(\rho + 1) - i\rho \tilde{\Lambda}] w(\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

Dans les régions où l'écoulement considéré est irrotationnel, on a $\tilde{\Lambda} = 0$ et il en résulte :

$$\tilde{\Phi} = \Phi, F_1(\zeta) = F_2(\zeta) = \Phi + i\tilde{H}_0; \quad (6.17)$$

les systèmes d'équations (6.14) et (6.14') se réduisent ici au système suivant :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial x_1}. \quad (6.14'')$$

La fonction $F(\zeta)$ est donc «une fonction pseudoanalytique par rapport à la fonction admissible $\sigma = \frac{1}{\rho}$ »; pour la dérivée complexe de $F(\zeta)$, on en déduit la valeur suivante :

$$\frac{dF}{d\zeta} = \frac{\rho + \frac{1}{\rho}}{2} w(\zeta). \quad (6.16')$$

On s'aperçoit que toutes les relations établies au Ch. IV, §4 se déduisent facilement en faisant $\rho = 1$ dans les relations similaires trouvées précédemment.

On a donc démontré le résultat suivant :

THÉOREME XXII. *A chaque écoulement plan, subsonique et de classe (C_s) on peut attacher deux «potentiels complexes» $F_1(\zeta)$, $F_2(\zeta)$ et une «vitesse complexe» $w(\zeta)$, ($\zeta = x_1 + i x_2$), définis respectivement par les relations (6.15,a) (6.15,b) et (6.15,c).*

Dans les régions du domaine considéré $(\mathfrak{D})$ où l'écoulement envisagé est rotationnel, $F_1(\zeta)$ est une fonction pseudoanalytique de première espèce par rapport au système d'équations (6.14), $F_2(\zeta)$ est une fonction pseudoanalytique de deuxième espèce par rapport au système d'équations (6.14') et leurs dérivées complexes du premier ordre sont liées à la «vitesse complexe» $w(\zeta)$ par les relations (6.16).

Dans les régions de $(\mathfrak{D})$ où cet écoulement est irrotationnel — et seulement dans ces régions — les deux «potentiels complexes» sont égaux : $F_1(\zeta) = F_2(\zeta) = F(\zeta)$, la fonction $F(\zeta)$ est une fonction pseudoanalytique par rapport à la fonction admissible $\sigma = \frac{1}{\rho}$ et sa dérivée complexe

$\frac{dF}{d\zeta}$ est liée à la «vitesse complexe» $w(\zeta)$ par la relation (6.16').

§ 2. On peut également étendre aux classes d'écoulements (C_s) et (C_H) tous les résultats obtenus au Ch. IV, §§ 5 et 6; les généralisations recherchées s'obtiendront de façon simple et directe en remarquant le caractère intrinsèque des résultats cités.

Considérons donc les écoulements de la classe (C_s) ou (C_H), qui ont lieu le long des surfaces de la famille (4.57) en vertu de l'hypothèse 6°. Cette hypothèse et l'équation de continuité (qui est la même pour les deux classes d'écoulements considérées ici) conduisent à la représentation suivante de la vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho} \text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0; \quad (6.18)$$

cette représentation de $\vec{v}$ est entièrement analogue à (4.60).

On ajoute également les hypothèses 7° et 8° formulées au Ch. IV, § 5. Les conséquences directes des hypothèses 6° et 7°, qui ont été données dans le cas (C_i), restent valables ici; les relations de (4.61) jusqu'à (4.64) garderont donc leurs formes analytiques. Dans le cas des écoulements de classe (C_s) ou (C_H) il faut ajouter la condition suivante:

$$\frac{\partial \rho}{\partial q_3} \equiv 0, \quad (6.19)$$

pour compléter les conditions (4.65).

On s'aperçoit aisément que toutes les relations, qui ont été déduites des hypothèses 6°, 7° et 8° au Ch. IV, §§ 5 et 6, ne concernent que « la géométrie » de l'écoulement; elles gardent donc leurs formes analytiques dans le cas (C_s) ou (C_H) et il ne faut ajouter que les précisions données précédemment.

Par conséquent, les résultats établis au Ch. IV, §§ 5 et 6, sont valables pour tout écoulement permanent et rotationnel d'un fluide parfait; la fixation de la classe d'écoulements considérée — (C_i), (C_s), (C_H) ou une autre — ne sert qu'à préciser l'expression analytique de l'équation de la quantité de mouvement, qui doit déterminer la fonction introduite H_0 .

On a obtenu le résultat suivant:

THÉORÈME XXIII. *Les écoulements « plans » sont les seuls écoulements permanents et rotationnels d'un fluide parfait qui satisfont simultanément aux conditions 6°, 7° et 8°⁴⁰⁾.*

Les résultats du Ch. IV, § 7 peuvent aussi être étendus aux écoulements de la classe (C_s); ainsi, en écrivant les équations du système

⁴⁰⁾ Voir l'énoncé de ces conditions au Ch. IV, § 5. Il faut préciser que, dans le cas général, on prend $\vec{v}$ sous la forme (6.18) et l'on ajoute la relation (6.19) aux conditions (4.65).

(5.50) dans un système quelconque de coordonnées curvilignes $T_q(q_1, q_2, q_3)$, nous sommes conduits à chercher des solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) du type :

$$\Psi_0 = q_3, H_0 = H_0(q_1, q_2). \quad (6.20)$$

Cette forme analytique des fonctions Ψ_0 et H_0 est entièrement équivalente à la condition suivante :

$$\text{grad } \Psi_0 \cdot \text{grad } H_0 \equiv 0 \text{ dans } (\mathfrak{D}). \quad (6.20')$$

Par conséquent, on cherche les écoulements de la classe (C_S) pour lesquels on peut trouver deux « paramètres » $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$ définissant la famille des lignes de courant et variant « d'une manière strictement indépendante » par rapport aux variables cartésiennes x_1, x_2, x_3 .

On suppose également que $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction « strictement indépendante » par rapport à une autre fonction $\xi(x_1, x_2, x_3)$, qui peut être prise comme « paramètre » définissant la position d'une particule fluide sur les lignes de courant ; cette dernière hypothèse n'est pas essentielle pour les développements ultérieurs, n'étant introduite que pour simplifier les calculs et les formules utilisées.

Dans ce cas, le système de coordonnées curvilignes T_q peut être choisi de la même façon qu'au Ch. I, § 3 ; on utilisera le signe supérieur $\sim$ pour préciser cette fois la dépendance des diverses fonctions par rapport aux variables q_1, q_2, q_3 , (par exemple : $N_0(x_1, x_2, x_3) \equiv \tilde{N}_0(q_1, q_2, q_3)$, $M_0(x_1, x_2, x_3) \equiv \tilde{M}_0(q_1, q_2, q_3)$, etc...).

Les conditions $(\mathfrak{C}^{(S)})$ doivent être remplies par la classe de fonctions (6.20) pour pouvoir lui appliquer les conclusions du Théorème XX ; en vertu des hypothèses faites, les conditions $(\mathfrak{C}^{(S)})$ ne concernent que les « paramètres » $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ et $H_0(x_1, x_2, x_3)$. Elles peuvent être exprimées soit par rapport aux variables introduites q_1, q_2, q_3 , sous la forme suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } \tilde{N}_0^{(S)} = 0, \quad \tilde{\beta}_0^{(S)} = 0, \\ \text{(b) } \frac{\partial \tilde{M}_0^{(S)}}{\partial q_3} \equiv 0, \frac{\partial \tilde{W}_0}{\partial q_3} \equiv 0, \frac{\partial \tilde{\alpha}_0^{(S)}}{\partial q_3} \equiv 0, \end{array} \right\} \quad (\tilde{\mathfrak{C}}^{(S)})$$

soit par rapport aux variables cartésiennes x_1, x_2, x_3 , sous la forme équivalente :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } N_0^{(S)} = 0, \quad \beta_0^{(S)} = 0, \\ \text{(b) } \left. \begin{array}{l} \text{grad } M_0^{(S)} \cdot \text{grad } \Psi_0 \equiv 0, \\ \text{grad } W_0 \cdot \text{grad } \Psi_0 \equiv 0, \\ \text{grad } \alpha_0^{(S)} \cdot \text{grad } \Psi_0 \equiv 0. \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (\mathfrak{C}^{(S)})$$

Les fonctions intervenant dans les conditions $(\tilde{\mathfrak{G}}^{(S)})$ ont les expressions suivantes ⁴¹⁾ :

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \tilde{N}_0^{(S)} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial q_1} \right)^2 \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial q_1} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial q_2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \right) \right], \\
 \text{(b)} \quad \tilde{M}_0^{(S)} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial q_1} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial q_2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial q_1} - \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial q_2} \right) \right] = \operatorname{div} (g^{33} \operatorname{grad} \tilde{H}_0), \\
 \text{(c)} \quad \tilde{W}_0^2 &= \frac{1}{g} \left[g_{11} \left(\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial q_2} \right)^2 - 2g_{12} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial q_1} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial q_2} + g_{22} \left(\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial q_1} \right)^2 \right], \\
 \text{(d)} \quad \tilde{\alpha}_0^{(S)} &= \frac{1}{g_{33}} \operatorname{grad} \frac{\tilde{W}_0^2}{2} \cdot \operatorname{grad} \tilde{H}_0 - \tilde{W}_0^2 \tilde{M}_0^{(S)}, \\
 \text{(e)} \quad \tilde{\beta}_0^{(S)} &= - |\operatorname{grad} \tilde{H}_0|^2 \operatorname{grad} \frac{\tilde{W}_0^2}{2} \cdot \operatorname{grad} \Psi_0 - \tilde{W}_0^2 \tilde{N}_0^{(S)} = \\
 &= - \tilde{W}_0^2 \left[\frac{\partial (\tilde{W}_0^2)}{\partial \Psi_0} + \tilde{N}_0^{(S)} \right].
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

On voit ainsi que la première condition de $(\tilde{\mathfrak{G}}^{(S)} \text{.a})$ est identiquement vérifiée par la classe de fonctions (6.20) si, et seulement si, les conditions (4.84) sont remplies simultanément en chaque point $M \in \mathfrak{D}$. La deuxième condition de $(\tilde{\mathfrak{G}}^{(S)} \text{.b})$ est également remplie dans $(\mathfrak{D})$, si l'on ajoute la condition (4.85) aux conditions (4.84). Les relations (6.21) montrent que, dans ce cas, les autres conditions $(\tilde{\mathfrak{G}}^{(S)})$ sont des conséquences des deux précédentes; elles sont aussi identiquement vérifiées. On peut donc retenir, comme «conditions suffisantes», seulement les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad N_0^{(S)} &= 0, \\ \text{(b)} \quad \operatorname{grad} W_0 \cdot \operatorname{grad} \Psi_0 &\equiv 0, \end{aligned} \right\} \text{ dans } (\mathfrak{D}). \tag{6.22}$$

Les conditions $(\tilde{\mathfrak{G}}^{(S)})$ étant remplies, l'équation (5.58, B) donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial q_3} \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathfrak{D}), \tag{6.23}$$

ou encore :

$$\operatorname{grad} \rho \cdot \operatorname{grad} \Psi_0 \equiv 0 \quad \text{dans } (\mathfrak{D}); \tag{6.23'}$$

⁴¹⁾ Les coefficients g_{ij} , g^{ij} , G et g ont la même signification qu'au Ch. IV, §7.

la masse spécifique $\rho(x_1, x_2, x_3)$ est donc une fonction «strictement indépendante» par rapport au «paramètre» $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$.

Par conséquent, les deux équations ($\tilde{\mathcal{G}}^{(N)}$. a) disparaissent dans ce cas; même si l'on donne l'expression analytique de la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ — de telle sorte qu'elle satisfasse aux conditions trouvées précédemment —, il ne reste que deux équations pour déterminer les trois fonctions inconnues: «le paramètre» $H_0(x_1, x_2, x_3)$, l'énergie totale $K(H_0)$ et la masse spécifique $\rho(x_1, x_2, x_3)$.

En vertu du Théorème XX et des conditions précédentes, les deux équations sont ($\mathcal{S}_I^{(S)}$.C) et la suivante:

$$\left(1 - \frac{W_0^2}{a^2 \rho^2}\right) M_0^{(S)} + \frac{|\text{grad } \Psi_0|^2}{a^2 \rho^2} \text{grad } \frac{W_0^2}{2} \cdot \text{grad } H_0 = \rho^2 \frac{dK}{dH_0}. \quad (6.24)$$

Tous les développements faits et tous les résultats trouvés dans le cas analogue du Ch. IV, §7 peuvent être étendus ici, parce que les conditions, qui limitent le choix de la fonction $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, sont les mêmes ((4.82') et (4.86)); seules les expressions analytiques des équations, restées pour déterminer les fonctions $H_0(x_1, x_2, x_3)$ et $K(H_0)$, sont différentes dans les deux cas.

Les écoulements de classe (C_S), qui correspondent à la classe de solutions «génératrices» (Ψ_0, H_0) ainsi définie, sont caractérisés par des propriétés entièrement équivalentes aux sept propriétés mises en évidence antérieurement (Ch. IV, §7). Naturellement, la masse spécifique ρ doit intervenir maintenant dans les expressions de la vitesse $\vec{v}$ et du tourbillon $\vec{\omega}$; on peut facilement établir les analogues des relations de (4.90) jusqu'à (4.96). Ces écoulements seront nommés: «écoulements bidimensionnels de classe (C_S^P)».

On peut donc formuler le théorème suivant:

THÉORÈME XXIV. *Les écoulements rotationnels et «bidimensionnels de classe (C_S^P)» sont caractérisés par la classe de solutions «génératrices» (Ψ_0, H_0) du système «réduit» ($\mathcal{S}_I^{(S)}$), qui est définie par les conditions suivantes:*

1° $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$ est une fonction harmonique dans le domaine ($\mathcal{D}$) des écoulements considérés.

2° La famille de surfaces:

$$\Psi_0(x_1, x_2, x_3) = \text{const.},$$

le long desquelles ont lieu les écoulements considérés, appartient à un système triple orthogonal de familles de surfaces; par conséquent, on peut toujours trouver un système de trois «paramètres» définissant un tel écoulement, chacun d'eux étant une fonction «strictement indépendante» par rapport aux deux autres.

3° Dans tout système orthogonal de coordonnées curvilignes T_0 , dans lequel on choisit $q_3 = \Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, les composantes covariantes du tenseur fondamental satisfont aux conditions (4.86).

4° $H_0(x_1, x_2, x_3)$ et $\rho(x_1, x_2, x_3)$ sont chacune des fonctions « strictement indépendantes » par rapport à $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$.

5° Les quatre fonctions : $\Psi_0(x_1, x_2, x_3)$, $H_0(x_1, x_2, x_3)$, $\rho(x_1, x_2, x_3)$ et $K(H_0)$ doivent satisfaire aux équations $(\mathcal{S}_1^{(S)}, C)$ et (6.24).

La correspondance qui s'est établie entre ces écoulements et cette classe de solutions « génératrices » (Ψ_0, H_0) du système « réduit » ($\mathcal{S}_1^{(S)}$) est biunivoque.

Les Théorèmes XX et XXIV assurent l'existence d'une correspondance biunivoque entre ces écoulements et la classe de solutions « formelles » (Ψ, H) du système « réduit » ($\mathcal{S}_1^{(S)}$), qui est définie en fonction de Ψ_0 et H_0 par les relations (4.18) et (4.19); la possibilité d'établir cette correspondance biunivoque est due également au fait que les deux conditions $(\mathcal{S}^{(S)}, a)$ ont été identiquement vérifiées dans ce cas.

On vérifie aisément que les écoulements « plans » et les écoulements à « symétrie axiale » — qui sont également rotationnels et de classe (C_S) — appartiennent à cette nouvelle classe d'écoulements.

B. Deux remarques finales

§ 3. Dans les chapitres précédents nous avons étudié les différents aspects de la « géométrie » des écoulements envisagés et, dans chaque cas, nous avons précisé le degré de détermination assuré aux « paramètres » qui caractérisent la « géométrie » de ces écoulements.

Mais, dans le cas des écoulements de classe (C_S) ou (C_H) , nous n'avons pas encore envisagé le degré de détermination, qui est assuré à la masse spécifique $\rho(x_1, x_2, x_3)$ par les équations des systèmes « réduits » ($\mathcal{S}_1^{(S)}$) ou ($\mathcal{S}_1^{(H)}$); il est donc nécessaire de préciser de quelle manière « la géométrie » d'un écoulement conditionne la variation de la masse spécifique ρ .

On limite cette étude au cas des écoulements de la classe (C_S) ; des résultats similaires peuvent être trouvés, par la même voie, dans le cas des écoulements de la classe (C_H) .

Plus précisément, on considère le problème suivant :

« Dans quelles conditions peuvent exister deux écoulements rotationnels, de classe (C_S) et ayant « la même géométrie », c'est-à-dire ayant la même famille de lignes de courant et la même famille de lignes de tourbillon ».

On donne donc deux familles de courbes, chacune dépendant de deux paramètres; on prend leurs équations sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0(x_1, x_2, x_3) &= \text{const.}, \\ H_0(x_1, x_2, x_3) &= \text{const.}, \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

et :

$$\left. \begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \text{const.}, \\ g(x_1, x_2, x_3) &= \text{const.}, \end{aligned} \right\} \quad (6.25')$$

et on suppose que les courbes ainsi définies sont suffisamment régulières pour qu'on puisse considérer (6.25) comme famille de lignes de courant et (6.25') comme famille de lignes de tourbillon des deux écoulements envisagés.

On introduit les notations suivantes :

$$\vec{w}_0 = \text{grad } \Psi_0 \wedge \text{grad } H_0, \quad \vec{\omega}_0 = \text{rot } \vec{w}_0, \quad \vec{\Omega} = \text{grad } f \wedge \text{grad } g; \quad (6.26)$$

pour les autres grandeurs du problème on emploiera les mêmes notations qu'auparavant en ajoutant l'indice supérieur (') ou (") pour distinguer les deux fluides.

Il en résulte les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}' &= \frac{1}{\rho'} \text{grad } \Psi' \wedge \text{grad } H' = \frac{J'}{\rho'} \vec{w}_0, \\ \vec{v}'' &= \frac{1}{\rho''} \text{grad } \Psi'' \wedge \text{grad } H'' = \frac{J''}{\rho''} \vec{w}_0, \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

$$J' = \frac{D(\Psi', H')}{D(\Psi_0, H_0)} = J'(\Psi_0, H_0), \quad J'' = \frac{D(\Psi'', H'')}{D(\Psi_0, H_0)} = J''(\Psi_0, H_0), \quad (6.28)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega}' &= \text{rot } \vec{v}' = \tau' \vec{\Omega} = \frac{J'}{\rho'} \vec{\omega}_0 + \text{grad } \frac{J'}{\rho'} \wedge \vec{w}_0, \\ \vec{\omega}'' &= \text{rot } \vec{v}'' = \tau'' \vec{\Omega} = \frac{J''}{\rho''} \vec{\omega}_0 + \text{grad } \frac{J''}{\rho''} \wedge \vec{w}_0; \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

on s'aperçoit que les deux relations (6.29) conduisent à la condition suivante :

$$\vec{\Omega} = \frac{J'}{\rho' \tau'} \vec{\omega}_0 + \frac{1}{\tau'} \text{grad } \frac{J'}{\rho'} \wedge \vec{w}_0 = \frac{J''}{\rho'' \tau''} \vec{\omega}_0 + \frac{1}{\tau''} \text{grad } \frac{J''}{\rho''} \wedge \vec{w}_0, \quad (6.30)$$

et on en déduit :

$$\left(\frac{J'}{\rho' \tau'} - \frac{J''}{\rho'' \tau''} \right) \vec{\omega}_0 = \left(\frac{1}{\tau''} \text{grad } \frac{J''}{\rho''} - \frac{1}{\tau'} \text{grad } \frac{J'}{\rho'} \right) \wedge \vec{w}_0. \quad (6.31)$$

Les relations (6.30) et (6.31) expriment la condition que les deux tourbillons $\vec{\omega}'$ et $\vec{\omega}''$ soient collinéaires en chaque point du domaine considéré.

On obtient la réponse à la question posée au début, en imposant aux « grandeurs physiques » de chaque fluide de satisfaire séparément aux équations du système (I₅) ; on trouvera ainsi les « conditions nécessaires » qui assurent la réalisation d'une telle situation.

Naturellement, l'équation de continuité ($I_s \cdot a$) est identiquement vérifiée, dans les deux cas, en vertu de la représentation (6.27) des champs des deux vitesses.

L'équation ($I_s \cdot b$) donne :

$$\vec{w}_0 \wedge \vec{\Omega} = \frac{\rho'}{J' \tau'} \text{grad } H' = \frac{\rho''}{J'' \tau''} \text{grad } H'', \quad (6.32)$$

et :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{J'}{\rho'} \right)^2 \vec{w}_0 \wedge \vec{\omega}_0 + \frac{J'}{\rho'} W_0^2 \text{grad } \frac{J'}{\rho'} - \frac{J'}{\rho'} \left(\vec{w}_0 \cdot \text{grad } \frac{J'}{\rho'} \right) \vec{w}_0 &= \text{grad } H', \\ \left(\frac{J''}{\rho''} \right)^2 \vec{w}_0 \wedge \vec{\omega}_0 + \frac{J''}{\rho''} W_0^2 \text{grad } \frac{J''}{\rho''} - \frac{J''}{\rho''} \left(\vec{w}_0 \cdot \text{grad } \frac{J''}{\rho''} \right) \vec{w}_0 &= \text{grad } H''; \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

enfin, les équations ($I_s \cdot c$) et ($I_s \cdot d$) donnent :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad p' &= p'(\rho'), \quad p'' = p''(\rho''), \\ (b) \quad a'^2 &= \frac{dp'}{d\rho'}, \quad a''^2 = \frac{dp''}{d\rho''}, \\ (c) \quad \frac{a'^2}{\rho'} \text{grad } \rho' + \text{grad} \left(\frac{J'^2 W_0^2}{2 \rho'^2} \right) &= \text{grad } H', \\ (d) \quad \frac{a''^2}{\rho''} \text{grad } \rho'' + \text{grad} \left(\frac{J''^2 W_0^2}{2 \rho''^2} \right) &= \text{grad } H''. \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

La condition (6.31) ne peut être satisfaite que dans l'un des trois cas suivants :

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ \quad \vec{w}_0 \cdot \vec{\omega}_0 &\equiv 0, \\ 2^\circ \quad \vec{\omega}_0 &\equiv 0, \\ 3^\circ \quad \frac{J'}{\rho' \tau'} &\equiv \frac{J''}{\rho'' \tau''}. \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Les deux premières possibilités (6.35) ne concernent que « la géométrie » des deux écoulements ; dans la troisième interviennent aussi les deux masses spécifiques ρ' et ρ'' .

Dans le premier cas, les relations (6.29) et (6.27) donnent :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{w}_0 \equiv 0 \quad (6.36)$$

et

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{\omega}_1 \equiv 0, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{\omega}_2 \equiv 0; \quad (6.36')$$

c'est donc le cas des écoulements ayant le tourbillon orthogonal à la vitesse.

Dans le second cas, on a :

$$\vec{w}_0 = \text{grad } \chi, \quad \Delta \chi = 0, \quad (6.37)$$

et les conditions (6.36') sont encore remplies en vertu de (6.29); c'est donc un cas particulier du premier.

Enfin, dans le troisième cas, la condition (6.30) donne :

$$\frac{1}{\tau'} \text{grad } \frac{J'}{\rho'} \wedge \vec{w}_0 = \frac{1}{\tau''} \text{grad } \frac{J''}{\rho''} \wedge \vec{w}_0;$$

mais :

$$\frac{J''}{\rho''} = \frac{J'}{\rho'} \frac{\tau''}{\tau'} \quad (6.38)$$

done, il en résulte :

$$\text{grad } \left(\frac{\tau''}{\tau'} \right) \wedge \vec{w}_0 \equiv 0. \quad (6.39)$$

La condition (6.32) donne directement :

$$\text{grad } H' \wedge \text{grad } H'' \equiv 0; \quad (6.40)$$

par suite, les deux énergies totales H' et H'' doivent nécessairement être rattachées par une relation du type $\varphi(H', H'') \equiv 0$.

Dans des conditions assez générales par rapport au problème de mécanique envisagé, qui peuvent donc être admises ici, une telle relation peut être explicitée et prise, par exemple, sous la forme suivante :

$$H'' = H''(H'); \quad (6.40')$$

dans ce cas, la condition (6.32) implique également :

$$\frac{dH''}{dH'} = \frac{\rho'}{\rho''} \frac{J''}{J'} \frac{\tau''}{\tau'}. \quad (6.41)$$

Si l'on prend la troisième possibilité (6.35) il en résulte :

$$\text{grad } H'' = \left(\frac{\tau''}{\tau'} \right)^2 \text{grad } H' \quad (6.42)$$

et on en déduit :

$$\text{grad } \left(\frac{\tau''}{\tau'} \right) \wedge \text{grad } H' \equiv 0. \quad (6.43)$$

En vertu de l'équation (I_s. b), qui impose $\vec{w}_0 \cdot \text{grad } H' \equiv 0$, les conditions (6.39) et (6.43) montrent que la troisième possibilité (6.35) ne peut être valable que lorsqu'on a :

$$\frac{\tau''}{\tau'} \equiv c_0 (\text{const.}); \quad (6.44)$$

— on peut toujours prendre $c_0 = 1$ — mais, dans ce cas, on a également :

$$\frac{J''}{\rho''} \equiv \frac{J'}{\rho'} \text{ et } \vec{v}' \equiv \vec{v}'', \vec{\omega}' \equiv \vec{\omega}''.$$

Le troisième cas (6.35) implique donc « l'unicité » de l'écoulement dans le cadre des hypothèses initiales ; il ne présente pas d'intérêt pour les développements ultérieurs.

D'autre part, les conditions (6.33), (6.34, c) et (6.34, d) donnent :

$$\begin{aligned} \vec{w}_0 \wedge \vec{\omega}_0 - \text{grad } \frac{W_0^2}{2} &= \frac{\rho'}{J'} \left(\vec{w}_0 \cdot \text{grad } \frac{J'}{\rho'} \right) \vec{w}_0 + \frac{a'^2 \rho'}{J'^2} \text{grad } \rho' = \\ &= \frac{\rho''}{J''} \left(\vec{w}_0 \cdot \text{grad } \frac{J''}{\rho''} \right) \vec{w}_0 + \frac{a''^2 \rho''}{J''^2} \text{grad } \rho'', \end{aligned} \quad (6.45)$$

ou la forme équivalente :

$$\begin{aligned} \vec{w}_0 \wedge \vec{\omega}_0 - \text{grad } \frac{W_0^2}{2} &= \frac{a'^2 \rho'}{J'^2} \text{grad } \rho' - \frac{1}{\rho'} (\vec{w}_0 \cdot \text{grad } \rho') \vec{w}_0 = \\ &= \frac{a''^2 \rho''}{J''^2} \text{grad } \rho'' - \frac{1}{\rho''} (\vec{w}_0 \cdot \text{grad } \rho'') \vec{w}_0; \end{aligned} \quad (6.45')$$

on en déduit la condition suivante :

$$\begin{aligned} \vec{w}_0 \cdot \text{grad } \frac{W_0^2}{2} &= \frac{a'^2 \rho'}{J'^2} \left(\frac{J'^2 W_0^2}{a'^2 \rho'^2} - 1 \right) \vec{w}_0 \cdot \text{grad } \rho' = \\ &= \frac{a''^2 \rho''}{J''^2} \left(\frac{J''^2 W_0^2}{a''^2 \rho''^2} - 1 \right) \vec{w}_0 \cdot \text{grad } \rho''. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Si l'on désigne par :

$$\mathfrak{M}' = \frac{V'}{a'} = \frac{J' W_0}{a' \rho'}, \quad \mathfrak{M}'' = \frac{V''}{a''} = \frac{J'' W_0}{a'' \rho''},$$

les nombres de MACH des deux écoulements, alors la condition (6.46) peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{W_0^2} \vec{w}_0 \cdot \text{grad } \frac{W_0^2}{2} &= \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{M}'^2} \right) \frac{1}{\rho'} \vec{w}_0 \cdot \text{grad } \rho' = \\ &= \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{M}''^2} \right) \frac{1}{\rho''} \vec{w}_0 \cdot \text{grad } \rho''. \end{aligned} \quad (6.46')$$

Si l'on a :

$$\vec{w}_0 \cdot \text{grad } \rho' = 0, \quad (6.47)$$

la condition (6.46) montre qu'on doit avoir aussi :

$$\vec{w}_0 \cdot \text{grad } \rho'' = 0, \quad (6.47')$$

sauf, peut-être, dans les points soniques ou dans les points de vitesse nulle, qui seront exclus du domaine considéré.

Lorsque la condition (6.47) est remplie, on déduit de (6.45') la condition suivante :

$$\frac{a'^2 \rho'}{J'^2} \text{grad } \rho' = \frac{a''^2 \rho''}{J''^2} \text{grad } \rho'' \quad (6.48)$$

et il en résulte :

$$\text{grad } \rho' \wedge \text{grad } \rho'' \equiv 0, \quad (6.49)$$

donc :

$$\rho'' = \rho''(\rho'); \quad (6.49')$$

dans ce cas, (6.48) donne :

$$\frac{d\rho''}{d\rho'} = \frac{a'^2}{a''^2} \cdot \frac{\rho'}{\rho''} \cdot \frac{J''^2}{J'^2}. \quad (6.50)$$

D'autre part, la condition (6.47) implique :

$$\rho' = \rho'(\Psi_0, H_0), \quad \rho'' = \rho''(\Psi_0, H_0), \quad (6.51)$$

en vertu des relations (6.26); les masses spécifiques ρ' et ρ'' sont donc constantes le long de chaque ligne de courant.

Les conditions (6.34, c), (6.34, d), (6.41) et (6.50) conduisent à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{J'}{\rho' \tau'} - \frac{J''}{\rho'' \tau''} \right) \left[\frac{a'^2 \rho'}{J'^2} \text{grad } \rho' + \text{grad } \frac{W_0^2}{2} \right] = \\ & = \frac{1}{\tau''} \text{grad } \frac{J''}{\rho''} - \frac{1}{\tau'} \text{grad } \frac{J'}{\rho'}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Si $\vec{\omega}_0 \neq 0$, alors les conditions (6.31), (6.45'), (6.47) et (6.52) donnent :

$$\left(\frac{J'}{\rho' \tau'} - \frac{J''}{\rho'' \tau''} \right) \vec{w}_0 \wedge \vec{\omega}_0 = \frac{1}{\tau''} \text{grad } \frac{J''}{\rho''} - \frac{1}{\tau'} \text{grad } \frac{J'}{\rho'},$$

$$\begin{aligned} \text{et : } \vec{w}_0 \wedge \left(\left(\frac{1}{\tau''} \text{grad } \frac{J''}{\rho''} - \frac{1}{\tau'} \text{grad } \frac{J'}{\rho'} \right) \wedge \vec{w}_0 \right) &= \frac{1}{\tau''} \text{grad } \frac{J''}{\rho''} - \\ &- \frac{1}{\tau'} \text{grad } \frac{J'}{\rho'}; \end{aligned}$$

il en résulte :

$$W_0 \equiv 1, \quad (6.53)$$

car la condition (6.47) implique également :

$$\vec{w}_0 \cdot \text{grad} \frac{J'}{\rho'} \equiv 0, \quad \vec{w}_0 \cdot \text{grad} \frac{J''}{\rho''} \equiv 0.$$

Par suite, dans ce cas, les modules des vitesses :

$$V' = |\vec{v}'| = \frac{J' W_0}{\rho'}, \quad V'' = |\vec{v}''| = \frac{J'' W_0}{\rho''}, \quad (6.54)$$

sont constants le long de chaque ligne de courant.

Si $\vec{\omega}_0 = 0$, alors la condition (6.52) devient :

$$\frac{1}{\tau''} \text{grad} \frac{J''}{\rho''} - \frac{1}{\tau'} \text{grad} \frac{J'}{\rho'} = 0; \quad (6.55)$$

dans ce cas, les relations (6.33) donnent :

$$\frac{J'}{\rho'} W_0^2 \text{grad} \frac{J'}{\rho'} = \text{grad} H', \quad \frac{J''}{\rho''} W_0^2 \text{grad} \frac{J''}{\rho''} = \text{grad} H'',$$

et il en résulte :

$$\text{grad} \frac{J'}{\rho'} \wedge \text{grad} H' = 0, \quad \text{grad} \frac{J''}{\rho''} \wedge \text{grad} H'' = 0,$$

$$\text{grad} W_0 \wedge \text{grad} H' = 0, \quad \text{grad} W_0 \wedge \text{grad} H'' = 0.$$

Donc, les modules (6.54) des vitesses $\vec{v}'$ et $\vec{v}''$ sont, dans ce cas aussi, constants le long de chaque ligne de courant; dans les deux cas précédents, les pressions p' (ρ'), p'' (ρ'') et les vitesses du son a' (ρ'), a'' (ρ'') sont également constantes le long de chaque ligne de courant.

Par conséquent, si la condition (6.47) est remplie, alors les seuls écoulements, qui peuvent avoir « la même géométrie », sont ceux ayant la masse spécifique ρ , le module de la vitesse $\vec{v}$, la pression p et la vitesse locale du son a , constantes le long de chaque ligne de courant; dans ce cas très particulier, il existe une infinité d'écoulements ayant « la même géométrie », chacun étant lié à « l'écoulement de référence » par les relations données précédemment.

Si la condition (6.47) n'est pas remplie, alors les conditions (6.45'), (6.46) et (6.46') gardent leurs formes; elles limitent les variations des masses spécifiques ρ' et ρ'' par rapport à la « géométrie » choisie. Cette géométrie est déterminée par le système « réduit » respectif; par suite, aux « conditions nécessaires » trouvées précédemment, il faut ajouter celles qui sont données par le système « réduit ». On peut ainsi obtenir des indications précieuses; par exemple, on vérifie aisément qu'il n'est pas pos-

sible d'exister deux écoulements différents de classe (C_s) , régis par les équations (5.53)⁴²⁾ et $(S_i^{(S)} \cdot C)$ et ayant la « même géométrie ».

Lorsqu'il est possible d'avoir plusieurs écoulements ayant la « même géométrie », on peut résoudre le problème mathématique correspondant pour un « fluide fictif » ; on choisit de façon convenable les différentes grandeurs, pour introduire ainsi des simplifications importantes de calcul. Ensuite, on revient à l'écoulement du fluide envisagé, en utilisant les relations de correspondance établies dans ce but.

On peut donc formuler le résultat suivant :

THÉORÈME XXV. *Les conditions suivantes doivent être remplies pour qu'il puisse exister deux ou plusieurs écoulements rotationnels de classe (C_s) ayant la même famille de lignes de courant et la même famille de lignes de tourbillon :*

1°. *La famille de lignes de courant donnée doit satisfaire soit à la condition (6.35,1°), soit à la condition (6.35,2°). Cette propriété n'est donc possible que pour les écoulements ayant le tourbillon orthogonal à la vitesse en chaque point de leur domaine d'existence.*

2°. *Les énergies totales H' , H'' des deux écoulements de ce type doivent être reliées par la relation (6.40).*

3°. *Les masses spécifiques ρ' , ρ'' des deux écoulements de ce type doivent satisfaire à la condition (6.45), qui les relie à la configuration géométrique donnée.*

Si ces conditions nécessaires sont remplies, on doit ajouter les conditions imposées par les systèmes « réduits » régissant la configuration géométrique donnée, d'une part, et les relations qui relient les grandeurs correspondantes des deux écoulements, d'autre part.

§ 4. Nous nous sommes limités, dans ce travail, à l'étude des classes d'écoulements (C_s) , (C_H) et (C_0) et nous avons montré que, en ce qui concerne l'aspect intrinsèque du problème, la même méthode mathématique est applicable dans les trois cas. Les trois classes d'écoulements ont été introduites dans Ch. I, § 2 par la voie habituelle, en partant de la classe (C_0) des écoulements permanents d'un fluide parfait et en ajoutant les hypothèses physiques 4, 4' ou 4''. Cette voie est naturelle et elle conduit aux classes particulières de (C_0) , qui sont les plus importantes et les plus étudiées ; mais elle ne permet pas d'introduire de façon naturelle d'autres classes d'écoulements particuliers.

Dans ce dernier paragraphe, nous nous proposons de donner une interprétation mathématique simple aux hypothèses physiques 4 et 4', qui permettra facilement d'introduire d'autres classes particulières d'écoulements permanents d'un fluide parfait.

Considérons la classe d'écoulements (C_0) régie par le système d'équations (I_1) .

⁴²⁾ C'est la classe d'écoulements définie par la condition (5.52) ; cette propriété est vraie si le système (5.53) contient deux équations, c'est-à-dire si les conditions (5.54) ne sont pas remplies.

Les équations (I₁.a) et (I₁.c) assurent l'existence d'une fonction — disons $\Psi_1(x_1, x_2, x_3)$ — telle que :

$$\rho \vec{v} = \text{grad } \Psi_1 \wedge \text{grad } S; \quad (6.56)$$

de même façon, les équations (I₁.a) et (1.6) — la dernière équation est une conséquence des équations (I₁.b) et (I₁.c) — assurent l'existence d'une autre fonction — disons $\Psi_2(x_1, x_2, x_3)$ — telle que :

$$\rho \vec{v} = \text{grad } \Psi_2 \wedge \text{grad } H. \quad (6.56')$$

L'introduction des fonctions Ψ_1 et Ψ_2 se fait par la même méthode de calcul qu'au Ch. II, § 1; on en déduit :

$$\rho \vec{v} = \text{grad } \Psi_1 \wedge \text{grad } S = \text{grad } \Psi_2 \wedge \text{grad } H. \quad (6.57)$$

Les deux «paramètres», qui définissent la famille de lignes de courant d'un tel écoulement, peuvent donc être choisis parmi les paires suivantes : (Ψ_1, S) , (Ψ_2, H) , (H, S) , (Ψ_1, Ψ_2) ; en général, chacune de ces quatre fonctions introduites peut être considérée comme fonction des deux autres paramètres Ψ_0', Ψ_0'' , définissant la famille de lignes de courant de l'écoulement envisagé.

Choisissons les paires (H, S) et (Ψ_1, Ψ_2) et introduisons les notations suivantes pour simplifier l'écriture :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad H &= H(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{H}(\Psi_1, \Psi_2), \\ S &= S(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{S}(\Psi_1, \Psi_2), \\ (b) \quad \Psi_1 &= \Psi_1(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{\Psi}_1(H, S), \\ \Psi_2 &= \Psi_2(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{\Psi}_2(H, S), \\ (c) \quad J_1 &= \frac{D(\widetilde{H}, \widetilde{S})}{D(\Psi_1, \Psi_2)}, \quad J_2 = \frac{D(\widetilde{\Psi}_1, \widetilde{\Psi}_2)}{D(H, S)} = \frac{1}{J_1}, \\ (d) \quad \vec{u} &= \text{grad } H \wedge \text{grad } S, \quad \vec{w} = \text{grad } \Psi_1 \wedge \text{grad } \Psi_2; \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

on exclut le cas très particulier défini par :

$$\text{grad } H \wedge \text{grad } S = 0 \quad \text{dans } (\mathfrak{D})$$

et on suppose que, dans le domaine considéré $(\mathfrak{D})$, on n'a pas des points isolés où cette condition soit satisfaite.

Dans ce cas, on a :

$$\rho \vec{v} = \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \Psi_2} \vec{w} = - \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \Psi_1} \vec{w} = \frac{\partial \widetilde{\Psi}_1}{\partial H} \vec{u} = - \frac{\partial \widetilde{\Psi}_2}{\partial S} \vec{u}, \quad (6.59)$$

et il en résulte :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_2} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Psi_1}, \\ \text{(b)} \quad \frac{\partial \tilde{\Psi}_2}{\partial S} &= -\frac{\partial \tilde{\Psi}_1}{\partial H}; \end{aligned} \right\} \quad (6.60)$$

on a également les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Psi_1} &= J_1 \frac{\partial \tilde{\Psi}_2}{\partial S}, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Psi_2} = -J_1 \frac{\partial \tilde{\Psi}_1}{\partial S}, \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_1} = -J_1 \frac{\partial \tilde{\Psi}_2}{\partial H}, \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_2} &= J_1 \frac{\partial \tilde{\Psi}_1}{\partial H}, \end{aligned} \quad (6.61)$$

qui permettent de passer directement des relations établies pour les fonctions $\tilde{H}$, $\tilde{S}$, aux relations correspondantes reliant les fonctions $\tilde{\Psi}_1$ et $\tilde{\Psi}_2$.

L'équation (I₁.b) donne :

$$\begin{aligned} \vec{v} \wedge \vec{\omega} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_2} \vec{w} \wedge \vec{\omega} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_2} (M_1 \text{grad } \Psi_2 - M_2 \text{grad } \Psi_1) = \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Psi_1} - T \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_1} \right) \text{grad } \Psi_1 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Psi_2} - T \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_2} \right) \text{grad } \Psi_2, \end{aligned} \quad (6.62)$$

où :

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}, \quad M_1 = \vec{\omega} \cdot \text{grad } \Psi_1, \quad M_2 = \vec{\omega} \cdot \text{grad } \Psi_2. \quad (6.63)$$

On en déduit les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad M_1 &= \frac{\rho}{\partial \tilde{S}} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Psi_2} - T \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_2} \right) = -\rho T - \rho \frac{\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Psi_2}}{\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Psi_1}}, \\ \text{(b)} \quad M_2 &= \frac{\rho}{\partial \tilde{S}} \left(-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Psi_1} + T \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_1} \right) = \rho + \rho T \frac{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_1}}{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_2}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

qui peuvent encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Psi_2} = -\frac{M_1 + \rho T}{\rho} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Psi_1}, \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_1} = \frac{M_2 - \rho}{\rho T} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_2}. \quad (6.65)$$

On peut obtenir un problème, déterminé du point de vue mathématique, en suivant l'une des voies suivantes :

1° En connaissant les expressions analytiques des fonctions $\tilde{H}$ et $\tilde{S}$, c'est-à-dire en connaissant la dépendance de l'énergie totale H et respectivement de l'entropie S par rapport à la paire de « paramètres » Ψ_1, Ψ_2 , qui définissent la famille de lignes de courant; dans ce cas, les équations (6.64) jouent le même rôle que les deux premières équations des systèmes « réduits » ($\mathbb{S}^{(S)}$) ou ($\mathbb{S}^{(H)}$). Pour ne retenir que les dérivées partielles des deux « paramètres » Ψ_1 et Ψ_2 par rapport aux variables cartésiennes orthogonales x_1, x_2, x_3 , on peut éliminer les dérivées partielles de $\rho(x_1, x_2, x_3)$, dans les premiers membres des équations (6.64), de même manière que dans le cas (C_H) — voir Ch. V, § 2 —.

On emploie, dans ce but, les quatre dernières équations scalaires du système (I_1), qui sont les mêmes que les quatre dernières équations scalaires du système (II_H); les premiers membres des équations (6.64) ont également les mêmes expressions analytiques que les premiers membres des équations ($\mathbb{S}^{(H)} \cdot A$) et respectivement ($\mathbb{S}^{(H)} \cdot B$).

Les hypothèses 4 et 4' du (Ch. I, § 2) ont conduit notre étude sur cette première voie; mais elles n'ont donné que l'expression analytique de l'une des deux fonctions — $\tilde{S}$ et respectivement $\tilde{H}$ —, l'autre fonction restant arbitraire.

On s'aperçoit également qu'on peut obtenir directement les deux premières équations des systèmes « réduits » ($\mathbb{S}^{(S)}$) et ($\mathbb{S}^{(H)}$), en introduisant les hypothèses 4 et respectivement 4' dans les relations précédentes.

2° En donnant les expressions analytiques des « paramètres » $\Psi_1(x_1, x_2, x_3), \Psi_2(x_1, x_2, x_3)$, c'est-à-dire en donnant la famille de lignes de courant. Dans ce cas, il reste à déterminer la dépendance de l'énergie totale $\tilde{H}$ et de l'entropie $\tilde{S}$ par rapport à ces « paramètres »; dans ce sens les relations (6.60,a) et (6.65) donnent le système suivant :

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_1} = \frac{M_2 - \rho}{(M_1 + \rho T)T} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Psi_2}, \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_2} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Psi_1}. \quad (6.66)$$

Les relations (6.65) et (6.66) mettent en évidence deux cas particuliers, dans lesquels elles ne sont plus valables :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } M_1 = -\rho T, \\ \text{(b) } M_2 = \rho. \end{array} \right\} \quad (6.67)$$

Si la condition (6.67,a) est remplie, alors on a :

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Psi_2} \equiv 0, \quad \tilde{H} = \tilde{H}(\Psi_1), \quad \tilde{S} = A(\Psi_1) \Psi_2 + B(\Psi_1), \quad (6.68)$$

où : $A(\Psi_1) = - \frac{d\tilde{H}}{d\Psi_1}$ et $B(\Psi_1)$ est une fonction arbitraire.

La classe d'écoulements définie par les conditions (6.67,a) et (6.68) contient, comme un cas particulier, la classe d'écoulements (C_H); en effet, si l'on ajoute la condition suivante :

$$M_2 = 0, \quad (6.69)$$

les relations (6.62) montrent qu'on doit avoir nécessairement :

$$H \equiv \text{const.} \quad \text{dans } (\mathfrak{D}),$$

Ψ_1 étant la fonction définie par (6.56) et Ψ_2 étant remplacé par S , dans ce cas.

On a ainsi retrouvé les deux premières équations du système «réduit» ($\mathfrak{S}^{(H)}$), car (6.69) est l'équation ($\mathfrak{S}^{(H)}$.A) et (6.67,a) est l'équation ($\mathfrak{S}^{(H)}$.B).

On a montré au Ch. V qu'on peut attacher le système «réduit» ($\mathfrak{S}^{(H)}$) à la classe d'écoulements (C_H); maintenant, on a précisé que, réciproquement, les écoulements de la classe (C_H) sont les seuls écoulements permanents d'un fluide parfait, qui sont régis par le système «réduit» ($\mathfrak{S}^{(H)}$).

Si la condition (6.67,b) est remplie, on trouve la classe d'écoulements définie par les relations suivantes :

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \Psi_1} \equiv 0, \quad \tilde{S} = \tilde{S}(\Psi_2), \quad \tilde{H} = A'(\Psi_2)\Psi_1 + B'(\Psi_2), \quad (6.68')$$

où :

$$A'(\Psi_2) = -\frac{d\tilde{S}}{d\Psi_2} \quad \text{et } B'(\Psi_2) \text{ est une fonction arbitraire.}$$

En ajoutant la condition suivante :

$$M_1 = 0, \quad (6.69')$$

on retrouve les deux premières équations du système «réduit» ($\mathfrak{S}^{(S)}$) et la classe d'écoulements (C_S); elle est donc un cas particulier de la classe d'écoulements définie par les relations (6.67,b) et (6.68').

Par conséquent, on a démontré le résultat suivant :

THÉORÈME XXVI. *Les écoulements rotationnels de la classe (C_S) sont les seuls écoulements permanents et rotationnels d'un fluide parfait, qui sont régis par le système «réduit» ($\mathfrak{S}^{(S)}$).*

Les écoulements rotationnels de la classe (C_H) sont les seuls écoulements permanents et rotationnels d'un fluide parfait, qui sont régis par le système «réduit» ($\mathfrak{S}^{(H)}$).

Les écoulements des classes (C_H) et (C_S) sont donc des cas particuliers des écoulements caractérisés par la condition (6.67,a) et respectivement (6.67,b); les relations (6.60,a), (6.62) et (6.65) montrent que les deux conditions (6.67) ne peuvent pas être remplies simultanément.

En général, lorsque la condition (6.67,a) ou (6.67,b) n'est pas remplie, les fonctions $\tilde{H}(\Psi_1, \Psi_2)$ et $\tilde{S}(\Psi_1, \Psi_2)$ doivent satisfaire à un système d'équations du type (6.66); le choix des équations, auxquelles doivent satisfaire les fonctions M_1 et M_2 , peut être fait de plusieurs façons, en définissant chaque fois une autre classe d'écoulements permanents et rotationnels d'un fluide parfait. Le choix fait peut assurer soit une simplification utile dans la forme du système d'équations (6.66), soit l'obtention d'un système «réduit» simple et significatif.

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

1. E. CARAFOLI, *Aerodinamica marilor viteze*. Ed. Acad. R.P.R., Bucarest, 1957.
2. P. GERMAIN, *Dynamique des gaz*, cours tenu à la Faculté des Sciences de Paris en 1959—1960 et en 1960—1961, polycopié, 1961.
3. C. JACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Gauthier-Villars, Paris, et Editions de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 1959.
4. J. PÉRE, *Cours de mécanique des fluides*, Gauthier-Villars, Paris, 1936.
5. H. VILLAT, *Leçons sur la théorie des tourbillons*, Gauthier-Villars, Paris, 1930.

TRAVAUX CITÉS :

1. E. BELTRAMI, *Annali di Matematica pura ed applicata*, II^e série, 1868, **1**, 329—366.
2. L. BERS, *Theory of Pseudoanalytic Functions*. Lectures Notes, New York University, 1953.
3. — *Local Theory of Pseudoanalytic Functions. Lectures on Functions of a Complex Variable*. Michigan University Press, 1955, 213—244.
4. — *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 1953, **6**, 513—526.
5. — *Proc. Nat. Acad. Sci., S.U.A.*, 1951, **37**, *1*, 42—47.
6. L. BERS, A. GELBART, *Quart. Appl. Math.*, 1943, **1**; *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1944, **56**, 67—93.
7. К. К. БЮШГЕНС, *Докл. Акад. Наук СССР*, 1951, **78**, 837—840.
8. — *Докл. Акад. Наук СССР*, 1952, **84**, 861—863.
9. B. CALONAZZO, *Rend. Accad. dei Lincei*, 5^e série, 1924, **33**, 396—400.
10. — *Boll. de l'Unione Mat. Italiana*, 1925, **4**, 103.
11. — *Rend. Accad. dei Lincei*, 6^e série, 1927, **6**, 288—291, 407—412.
12. G. CALUGARFANU, *Thèse*, Paris, 1928.
13. U. CISOCCI, *Rend. Accad. dei Lincei*, 6^e série, 1925, **1**, 612—617.
14. — *Boll. del l'Unione Mat. Italiana*, 1923, **2**, 125.
15. L. DRAGOS, *Rend. Accad. dei Lincei*, 8^e série, 1958, **24**, 142—148.
16. B. FINZI, *Rend. Accad. dei Lincei*, 6^e série, 1925, **2**, 236—241.
17. — *Rend. del Circolo Mat. di Palermo*, 1927, **51**, 1—24.
18. P. R. GARABEDIAN, *J. Math. Mech.*, 1960, **9**, *2*, 241—271.
19. — *J. Math. Mech.*, 1960, **9**, *6*, 905—915.
20. P. R. GARABEDIAN, H. LIEBERSTEIN, *J. Aero. Sci.*, 1958, **25**, 109—118.
21. G. GHEORGHELEV, *Studii și cercetări*, Acad. R.P.R., Filiala Iași, 1955, **2**, *1*—18.
22. — *Rev. Univ. de Jassy*, 1955, **2**, 43—65.
23. M. GERMĂNE-CU, *Bul. Școlii Politehnice din Timișoara*, 1929.
24. PH. HARTMANN, A. WINTER, *Amer. J. Math.*, 1953, **75**, 449—476; 1954, **76**, 351—361.
25. F. JOHN, *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 1960, **13**, 551—585.
26. H. LILWY, *Math. Ann.*, 1929, **101**, 609—619.
27. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1959, **65**, 37—58.
28. A. MASOTTI, *Rend. Accad. dei Lincei*, 6^e série, 1927, **5**, 985—989.
29. GR. MOISIL, *Anal. Acad. Rom.*, III^e série, 1941, **15**, 695—730.
30. — *Bul. Științ. Acad. R.P.R., seria mat.-fiz.*, 1954, **6**, 253—264.
31. — *Comunicările Acad. R.P.R.*, 1955, **5**, *1*, 7—21.

32. M. NICOLESCU, Thèse, Paris, 1928.
33. L. E. PAYNE, *Archive for Rat. Mech. and Anal.*, **5**, 1, 35—46.
34. H. POINCARÉ, *Théorie des tourbillons*, Paris, 1893.
35. D. POMPEIU, *Rend. del Circolo Mat. di Palermo*, 1912, **33**; 1913, **35**.
36. B. SEGRE, *Annali di Matematica*, 4^e série, 1924, **1**, 31—55.
37. N. TEODORESCU, Thèse, Paris, 1931.
38. — *La dérivée aréolaire*, Bucarest, 1936.
39. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1929, **189**; 1930, **190**.
40. — *Annali di Matematica*, 1933, **11**.
41. V. VALCOVICI, *Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R.*, 1952, **4**, 541—545.
42. — *Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R.*, 1953, **5**, 147—152.
43. — *Rend. Accad. dei Lincei*, 8^e série, 1956, **21**, 287—296.
44. И. Н. БЕУКА, *Обобщенные аналитические функции*. Москва, 1959.
45. A. VITERBI *Atti del R. Ist. Veneto*, **61**, 449—464,

Note. Cette Thèse a été publiée entièrement de la manière suivante :

- les chapitres I et II dans « *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées*, Acad. R.P.R. », 1962, 7, 3 ;
- les chapitres III et IV dans « *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques de la R.P.R.* », 1960, 4 (52), 2 et 3 (parus en 1962) ;
- les chapitres V et VI dans « *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées*, Acad. R.P.R. », 1963, 8, 1.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

« Méthodes d'étude du problème de l'onde de choc
détachée dans les écoulements hypersoniques »

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 29 Mai 1961

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PÉRÈS

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN SARRAILH

